หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕

คณิตศาสตร์ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๖๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติ เพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๑ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ เมทริกซ์ และเวกเตอร์ ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชนจึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๑**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๑ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ การหาระยะทางและความสูง

เมทริกซ์ เมทริกซ์ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด ๒ × ๒ และ ๓ × ๓ เมทริกซ์ผกผัน การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

เวกเตอร์ เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์ ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก ผลคูณเชิงสเกลาร์ ผลคูณเชิงเวกเตอร์

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. เข้าใจฟังก์ชันตรีโกณมิติและลักษณะกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๒. แก้สมการตรีโกณมิติ และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๓. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
๔. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
๕. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ ๒ × ๒
๖. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว
๗. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์และผลคูณเชิงเวกเตอร์
๘. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

รวมทั้งหมด ๘ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ .... ”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

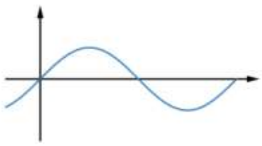
บทที่ 1 จะใช้สี บทที่ 2 จะใช้สี บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ

บทที่ 1 – 2

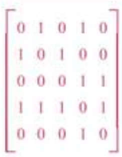
บทที่	เนื้อหา	หน้า

1



ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

2



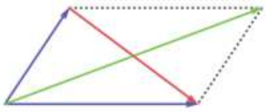
เมทริกซ์

สารบัญ

บทที่ 3

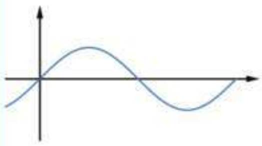
บทที่	เนื้อหา	หน้า

3



เวกเตอร์

บทที่ 1 | ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

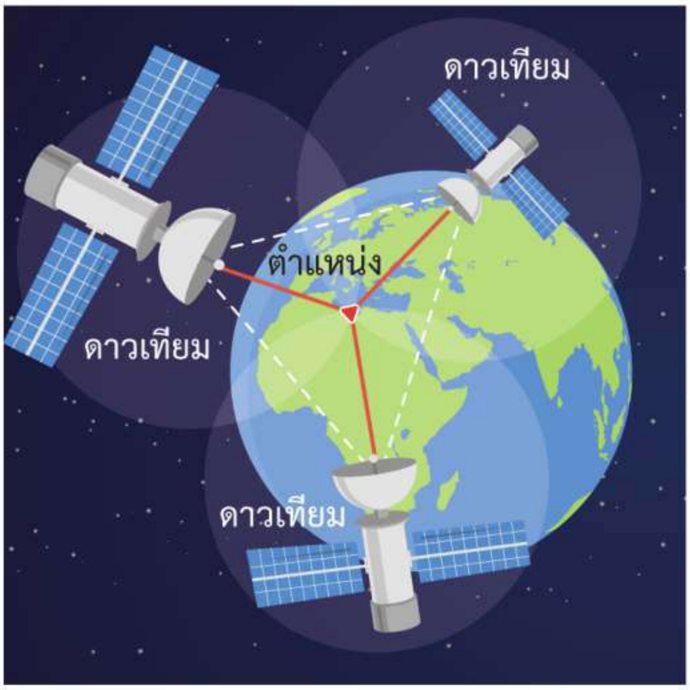


จุดมุ่งหมาย

1. หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
2. หาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
3. ใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมในการแก้ปัญหา
4. หาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
5. พิสูจน์เอกลักษณ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ
6. แก้สมการตรีโกณมิติ
7. ใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหา
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ



ระบบกำหนดตำแหน่งบนโลก (Global Positioning System) หรือเรียกย่อ ๆ ว่า GPS เป็นระบบที่ใช้อย่างแพร่หลายในปัจจุบัน โดย GPS จะใช้ข้อมูลจากดาวเทียมที่อยู่เหนือผิวโลกในการระบุพิกัดภูมิศาสตร์และระดับความสูงของพื้นที่ เมื่อใช้ GPS ร่วมกับแผนที่จะสามารถช่วยนำทางพาหนะหรือผู้ใช้ เพื่อให้ไปถึงที่หมายได้ ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่เป็นพื้นฐานสำคัญของ GPS คือ ตรีโกณมิติ ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยความสัมพันธ์ระหว่างมุมและด้านของรูปสามเหลี่ยม ตลอดจนการวัดระยะทาง พื้นที่ มุม และทิศทางที่ยากแก่การวัดโดยตรง นอกจากนี้ ตรีโกณมิติยังได้นำไปประยุกต์ใช้กับศาสตร์อื่น ๆ อีกมากมาย เช่น ฟิสิกส์ วิศวกรรมเครื่องกลและไฟฟ้า ดาราศาสตร์ การเดินเรือ การสำรวจ และดนตรี

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัสในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น
- ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน
- เรขาคณิตวิเคราะห์

ipst.me/8447

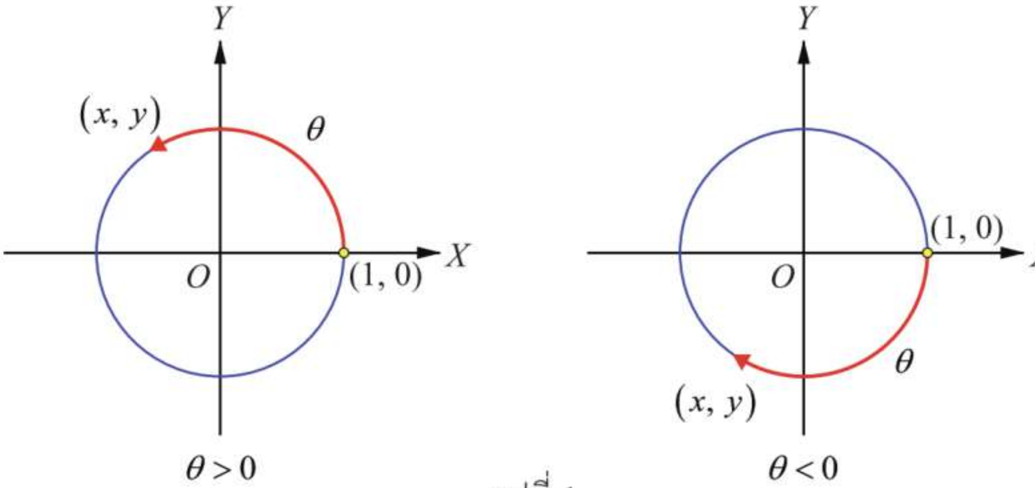
1.1 ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

การกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ทำได้โดยใช้วงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเป็นหลักในการกำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ และจะเรียกวงกลมดังกล่าวว่า **วงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle)** วงกลมนี้เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1\right\}$$

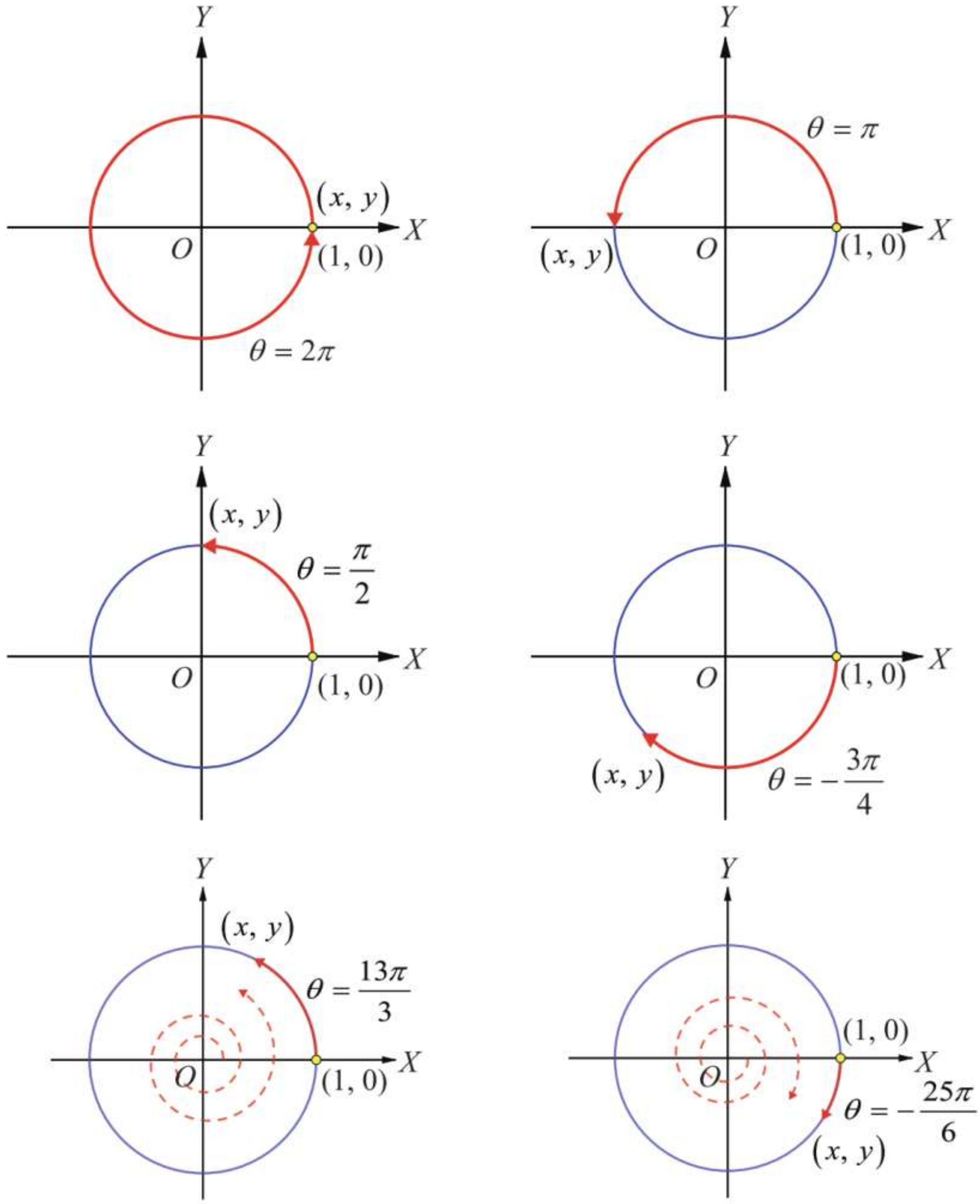
เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) จากจุด $(1, 0)$ วัดระยะไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยให้ยาว $|\theta|$ หน่วย จะถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีข้อตกลงสำหรับทิศทางของการวัดดังนี้

เมื่อ $\theta > 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
เมื่อ $\theta < 0$ จะวัดส่วนโค้งจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกา
เมื่อ $\theta = 0$ จุดปลายส่วนโค้งคือจุด $(1, 0)$



รูปที่ 1

รูปต่อไปนี้แสดงตำแหน่งของจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อกำหนด θ ให้มีค่าต่าง ๆ กัน



รูปที่ 2

จะเห็นว่า เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ แสดงว่า วัดส่วนโค้งเกิน 1 รอบ เพราะเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย

ดังนั้น จึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$f(\theta)=x$$
$$g(\theta)=y$$

เมื่อ $(x,\ y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1,\ 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางตามที่กล่าวข้างต้น

เรียกฟังก์ชัน g และ f ดังกล่าวนี้ว่า **ฟังก์ชันไซน์ (sine function)** และ **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function)** ตามลำดับ และจะเขียนแทน g ด้วย sin และเขียนแทน f ด้วย cos ดังนี้

$y=\sin\theta$ (อ่านว่า วาย เท่ากับ ไซน์ทีตา)

$x=\cos\theta$ (อ่านว่า เอกซ์ เท่ากับ คอสทีตา)

วงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เป็นกราฟของความสัมพันธ์

$$\{(x,\ y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\ |\ x^2+y^2=1\}$$

จะเห็นว่า $-1\le y\le 1$ และ $-1\le x\le 1$ ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์จะเป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

นั่นคือ เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง ตั้งแต่ -1 ถึง 1 และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสอง คือ เซตของจำนวนจริง

จากสมการ $x^2+y^2=1,\ y=\sin\theta$ และ $x=\cos\theta$ จะได้ความสัมพันธ์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ดังนี้

$$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1 \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หรือ

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad \text{เมื่อ } \theta \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

หมายเหตุ $\cos^2\theta$ หมายถึง $(\cos\theta)(\cos\theta)$

$\cos\theta^2$ หมายถึง cos ของจำนวนจริง θ^2

เสริมสมอง : Hipparchus และ Ptolemy



Hipparchus of Nicaea



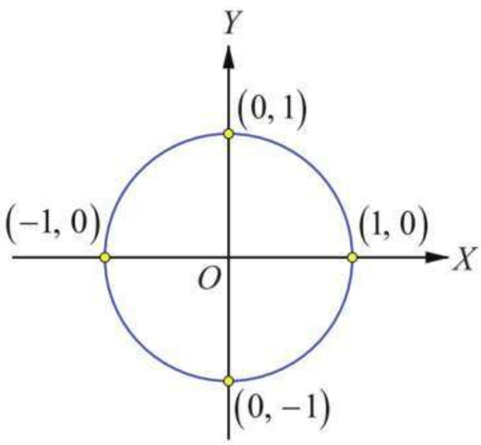
Claudius Ptolemy

Hipparchus of Nicaea (190−120 ปีก่อนคริสต์ศักราช) นักดาราศาสตร์ นักภูมิศาสตร์ และนักคณิตศาสตร์ชาวกรีก ได้รับการยกย่องว่าเป็นบิดาแห่งตรีโกณมิติ โดยได้พัฒนาวิชาตรีโกณมิติ และได้ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและผลงานของอาร์คิมีดีสในการสร้างตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งมีความสำคัญอย่างยิ่งต่อการศึกษาด้านอื่น ๆ ได้แก่ ดาราศาสตร์ การเดินเรือ วิทยาศาสตร์ และวิศวกรรมศาสตร์ ในยุคที่ยังไม่มีเครื่องคิดเลข แต่เนื่องจากงานของ Hipparchus ได้หายสาบสูญไปตามกาลเวลาเกือบทั้งหมด ข้อมูลส่วนใหญ่จึงได้มาจากเอกสารของ Claudius Ptolemy (ค.ศ. 100−170) นักคณิตศาสตร์ นักดาราศาสตร์ นักภูมิศาสตร์ และนักโหราศาสตร์ชาวกรีก ผู้สืบทอดงานของ Hipparchus โดยผลงานชิ้นเอกของ Ptolemy คือตำราทางคณิตศาสตร์และดาราศาสตร์ที่มีชื่อว่า Almagest

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

ในหัวข้อนี้จะหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับ θ บางค่าที่สามารถหาพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1,0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ได้ด้วยวิธีง่าย ๆ

ถ้า $\theta = 0$ จะได้ จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว 0 หน่วย คือ $(1,0)$ ดังรูป
ดังนั้น $\sin 0 = 0$ และ $\cos 0 = 1$



รูปที่ 3

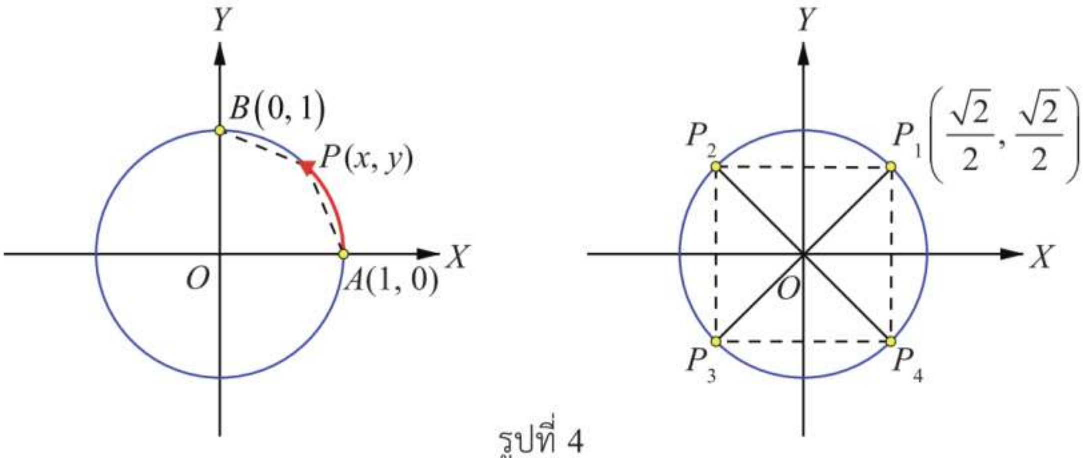
เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย และจุด $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ และ $(0, -1)$ เป็นจุดที่แบ่งเส้นรอบวงของวงกลมออกเป็นสี่ส่วนเท่า ๆ กัน โดยแต่ละส่วนยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ทำให้ได้ว่า

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{2} &= 1, & \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= -1 \\
\sin\pi &= 0, & \sin(-\pi) &= 0 \\
\sin\frac{3\pi}{2} &= -1, & \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 1 \\
\cos\frac{\pi}{2} &= 0, & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= 0 \\
\cos\pi &= -1, & \cos(-\pi) &= -1 \\
\cos\frac{3\pi}{2} &= 0, & \cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) &= 0
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\theta = \frac{n\pi}{2}$ โดยที่ n เป็นจำนวนเต็ม หาได้จากพิกัดของจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\left|\frac{n\pi}{2}\right|$ หน่วย โดยวัดในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ ซึ่งจุดปลายนั้นจะเป็นจุดใดจุดหนึ่งในสี่จุดต่อไปนี้คือ $(1, 0), (0, 1), (-1, 0)$ และ $(0, -1)$

ต่อไปจะพิจารณาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็น $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ และ $\frac{\pi}{3}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{4}$ และ $\cos\frac{\pi}{4}$



รูปที่ 4

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง AP ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB และยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PB ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ
$$PB = PA$$
$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2-2y+1 = x^2-2x+1+y^2$$

จะได้
$$x = y$$

แต่
$$x^2+y^2 = 1$$
(เพราะ $P(x, y)$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย)

ดังนั้น
$$2x^2 = 1$$

จะได้ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ หรือ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

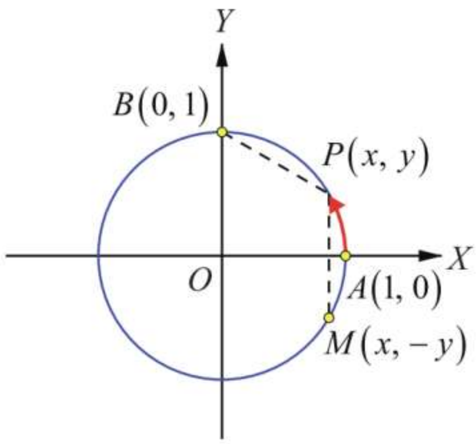
เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{6}$ และ $\cos\frac{\pi}{6}$



รูปที่ 5

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PB ยาว $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ ส่วนโค้ง AM ยาวเท่ากับส่วนโค้ง AP และยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย และจุด M มีพิกัดเป็น $(x, -y)$

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PB

นั่นคือ

$$\begin{aligned}
PM &= PB \\
\sqrt{(y-(-y))^2} &= \sqrt{x^2+(y-1)^2} \\
4y^2 &= x^2+y^2-2y+1 \\
4y^2+2y-2 &= 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2+y^2=1 \\
2y^2+y-1 &= 0 \\
(2y-1)(y+1) &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ $y=\frac{1}{2}$ หรือ $y=-1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

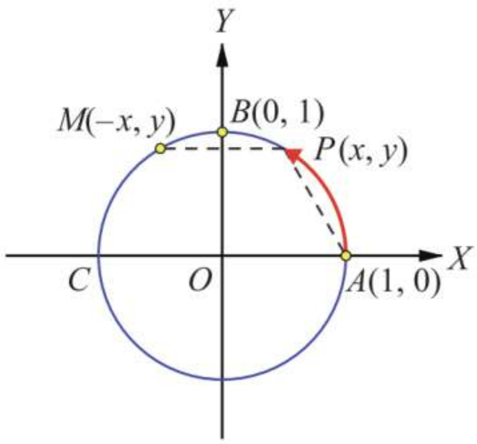
จะได้ $y = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $x^2 + y^2 = 1$ จะได้ $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}$



รูปที่ 6

ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดบนส่วนโค้ง AB ที่ทำให้ส่วนโค้ง AP ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด P โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

ดังนั้น พิกัดของจุด M คือ $(-x, y)$ และส่วนโค้ง CM ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย

เนื่องจากส่วนโค้งของครึ่งวงกลมยาว π หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง PM ยาว $\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ หน่วย

จะได้ คอร์ด PM ยาวเท่ากับคอร์ด PA

นั่นคือ

$$\begin{aligned} PM &= PA \\ \sqrt{\left(x-(-x)\right)^2} &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\ 4x^2 &= x^2-2x+1+y^2 \\ 4x^2+2x-2 &= 0 \quad \text{เนื่องจาก } x^2+y^2=1 \\ 2x^2+x-1 &= 0 \\ (2x-1)(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $x=\frac{1}{2}$ หรือ $x=-1$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น x และ y จึงเป็นจำนวนจริงบวก

จะได้ $x=\frac{1}{2}$

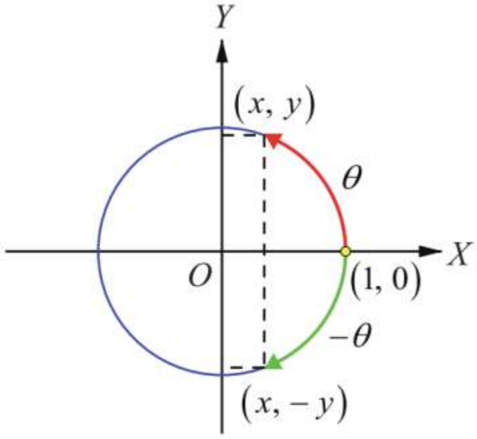
เนื่องจาก $x^2+y^2=1$ จะได้ $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น จุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย โดยวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คือ จุด $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

นั่นคือ $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ

พิจารณาจำนวนจริง $\theta > 0$ และ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย (เนื่องจาก $\theta > 0$ จึงได้ $|\theta| = \theta$) เมื่อสะท้อนจุด (x, y) โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน จะได้จุด $(x, -y)$ เป็นภาพสะท้อน จุด $(x, -y)$ จึงเป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมดังกล่าวที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ไปในทิศทางตามเข็มนาฬิกาที่ยาว θ หน่วย ดังรูป หรือกล่าวตามข้อตกลงเรื่องการวัดส่วนโค้งที่กล่าวมาแล้วได้ว่า $(x, -y)$ เป็นจุดปลายของส่วนโค้งที่เกิดจากจำนวนจริง $-\theta$



รูปที่ 7

จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$ สรุปได้ว่า

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta$$

และ $$x = \cos(-\theta), \quad -y = \sin(-\theta)$$

ดังนั้น

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

นั่นคือ ถ้าสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบวกใด ๆ ได้ ก็จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงลบที่เป็นตัวผกผันการบวกของจำนวนจริงบวกนั้น ๆ ได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 1

จงหาค่าของ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

จะได้ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

และ $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ■

เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาว 2π หน่วย ดังนั้น จุดปลายของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว $2n\pi + \theta$ หน่วย จะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย โดยที่เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะวัดระยะในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา n รอบ แต่ถ้า n เป็นจำนวนเต็มลบ จะวัดระยะในทิศทางตามเข็มนาฬิกา n รอบ จึงสรุปได้ว่า

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$$

$$\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$$

จากสมบัติข้างต้นนี้ จะเห็นว่าถ้าหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้แล้ว จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงทุกจำนวนได้ด้วย

ตัวอย่างที่ 2

จงหาค่าของ $\sin\frac{25\pi}{4}$ และ $\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

วิธีทำ

$$\sin\frac{25\pi}{4} = \sin\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

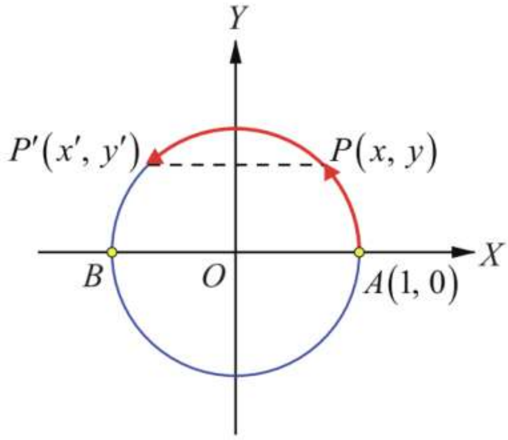
และ

$$\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \cos\left(-4\pi+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

■

จากที่ทราบว่าเมื่อหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π ได้ ก็จะหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใด ๆ ได้ แต่เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วย มีแกน X และแกน Y เป็นแกนสมมาตร การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จึงหาได้จากค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง $\frac{\pi}{2}$ ดังแสดงได้ดังนี้

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



รูปที่ 8

ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$
ให้ $\alpha = \pi - \theta$
จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'B$ ยาว α หน่วย
ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน
จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = y,\ x' = -x$
เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย
ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$
แต่ $y = y' = \sin\theta = \sin(\pi - \alpha)$
และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi - \alpha)$
สรุปได้ว่า

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดให้ $\sin\frac{\pi}{12} \approx \frac{13}{50}$ จงหาค่าประมาณของ

1) $\sin\frac{11\pi}{12}$

2) $\cos\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ 1)
$$\begin{aligned}\sin\frac{11\pi}{12} &= \sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= \sin\frac{\pi}{12} \\ &\approx \frac{13}{50}\end{aligned}$$

2) เนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

จะได้
$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{12} + \cos^2\frac{\pi}{12} &= 1 \\ \cos^2\frac{\pi}{12} &= 1 - \sin^2\frac{\pi}{12} \\ &\approx 1 - \left(\frac{13}{50}\right)^2 \\ &\approx \frac{2331}{2500}\end{aligned}$$

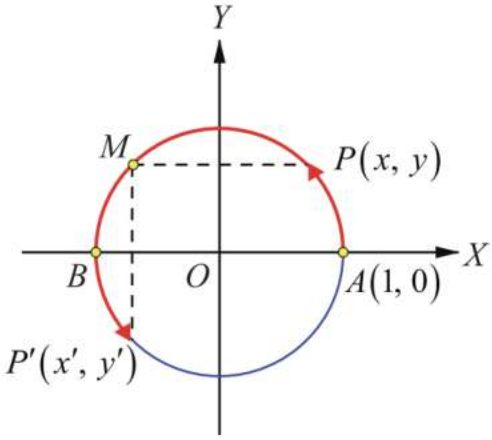
เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{12}$ หน่วย เมื่อวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจตุภาคที่ 1

ดังนั้น $\cos\frac{\pi}{12} \approx \frac{\sqrt{2331}}{50}$

จะได้
$$\begin{aligned}\cos\frac{11\pi}{12} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{12} \\ &\approx -\frac{\sqrt{2331}}{50}\end{aligned}$$

■

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 3 $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$



รูปที่ 9

ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$

ให้ $\alpha = \theta - \pi$

จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

เนื่องจากส่วนโค้ง AB ยาว π หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้ง BP' ยาว α หน่วย

ให้จุด M เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน และจุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด M โดยมีแกน Y เป็นเส้นสะท้อน

จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y, x' = -x$

เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$

แต่ $-y = y' = \sin\theta = \sin(\pi + \alpha)$

และ $-x = x' = \cos\theta = \cos(\pi + \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดให้ $\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{17}{100}$ จงหาค่าประมาณของ

1) $\sin\frac{19\pi}{18}$

2) $\cos\frac{19\pi}{18}$

วิธีทำ 1)

$$\begin{aligned}\sin\frac{19\pi}{18} &= \sin\left(\pi+\frac{\pi}{18}\right)\\ &= -\sin\frac{\pi}{18}\\ &\approx -\frac{17}{100}\end{aligned}$$

2) เนื่องจาก $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

จะได้

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{\pi}{18} &= 1\\ \cos^2\frac{\pi}{18} &= 1-\sin^2\frac{\pi}{18}\\ &\approx 1-\left(\frac{17}{100}\right)^2\\ &\approx \frac{9711}{10000}\end{aligned}$$

เนื่องจากจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{18}$ หน่วย เมื่อวัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา อยู่ในจตุภาคที่ 1

ดังนั้น

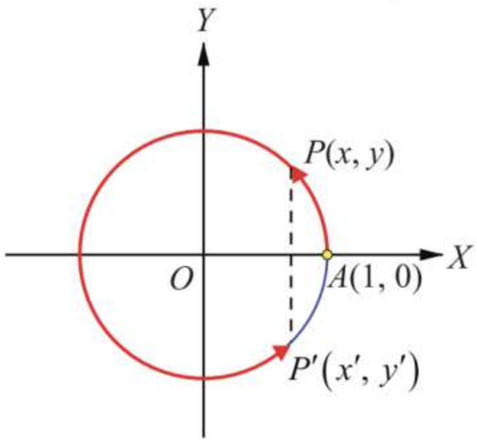
$$\cos\frac{\pi}{18} \approx \frac{\sqrt{9711}}{100}$$

จะได้

$$\begin{aligned}\cos\frac{19\pi}{18} &= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{18}\right)\\ &= -\cos\frac{\pi}{18}\\ &\approx -\frac{\sqrt{9711}}{100}\end{aligned}$$

■

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจตุภาคที่ 4 $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$



รูปที่ 10

ให้ $P'(x', y')$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย
ดังนั้น $y' = \sin\theta$ และ $x' = \cos\theta$
ให้ $\alpha = 2\pi - \theta$
จะได้ว่า $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
เนื่องจากเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว 2π หน่วย
ดังนั้น ส่วนโค้ง $P'A$ ยาว α หน่วย
ให้จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด $P'(x', y')$ โดยมีแกน X เป็นเส้นสะท้อน
จะได้ว่าส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y' = -y, x' = x$
เนื่องจาก $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin\alpha$ และ $x = \cos\alpha$

แต่ $-y = y' = \sin\theta = \sin(2\pi - \alpha)$

และ $x = x' = \cos\theta = \cos(2\pi - \alpha)$

สรุปได้ว่า

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

ตัวอย่างที่ 5

จงหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของ $\frac{11\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\sin\frac{11\pi}{6} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

และ

$$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้

1) 8π
2) -8π
3) $\frac{7\pi}{2}$
4) $-\frac{7\pi}{2}$
5) 57π
6) -57π

2. จงหาจำนวนจริง θ มา 5 จำนวนที่ทำให้
   1) $\sin\theta = 0$
   2) $\cos\theta = 1$
   3) $\sin\theta = -1$
   4) $\cos\theta = -1$
   5) $\sin\theta = \frac{1}{2}$
   6) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   7) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   8) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

3. ให้ $\sin\theta = 0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคใดได้บ้าง

4. ให้ $\cos\theta = -0.56$ จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคใดได้บ้าง

5. จงเขียนฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงที่อยู่ในช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
   1) $\frac{5\pi}{3}$
   2) $\frac{7\pi}{6}$
   3) $\frac{9\pi}{5}$
   4) $\frac{7\pi}{10}$
   5) $-\frac{37\pi}{12}$
   6) $-\frac{16\pi}{7}$

6. จงหาค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงต่อไปนี้
   1) $-\frac{5\pi}{4}$
   2) $-\frac{7\pi}{4}$
   3) $2\pi + \frac{\pi}{4}$
   4) $2\pi + \frac{3\pi}{4}$
   5) $3\pi + \frac{\pi}{3}$
   6) $-\frac{7\pi}{6}$
   7) $-\frac{7\pi}{3}$
   8) $\frac{13\pi}{3}$
   9) $\frac{37\pi}{6}$
   10) $\pi - \frac{\pi}{3}$

7. จงหาค่าประมาณของ

1) $\sin\frac{37\pi}{6}$

2) $\sin\frac{109\pi}{36}$ เมื่อ $\sin\frac{\pi}{36} \approx \frac{9}{100}$

3) $\sin\left(-\frac{13\pi}{4}\right)$

4) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$

5) $\cos\frac{31\pi}{4}$

6) $\cos\frac{34\pi}{3}$

7) $\cos\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$

8) $\cos\left(-\frac{73\pi}{36}\right)$ เมื่อ $\sin\frac{\pi}{36} \approx \frac{9}{100}$

8. กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{1}{5}$ จงหาค่าของ

1) $\sin(\pi - \theta)$

2) $\sin(-\theta)$

3) $\sin(\theta - \pi)$

4) $\cos\theta$

5) $\cos(\pi + \theta)$

6) $\cos(\theta - 2\pi)$

9. ให้ $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \frac{1}{2}$ จงหาค่าของ $\cos\theta$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

10. จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ ให้ยกตัวอย่างค้าน

1) $\sin\theta \ge \cos\theta$ เมื่อ $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$

2) $\sin\theta = \cos\theta$ เมื่อ θ คือ $\frac{\pi}{4}$ หรือ $\frac{5\pi}{4}$

3) $-2 \le \sin\theta + \cos\theta \le 2$ เมื่อ $\theta \in \mathbb{Z}$

1.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ

นอกจากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ดังกล่าวแล้ว ยังมีฟังก์ชันตรีโกณมิติที่สำคัญอีกหลายฟังก์ชัน ดังต่อไปนี้

ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent function) เขียนแทนด้วย tan (อ่านว่า แทน)
ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant function) เขียนแทนด้วย sec (อ่านว่า เซก)
ฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant function) เขียนแทนด้วย cosec หรือ csc (อ่านว่า โคเซก)
ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent function) เขียนแทนด้วย cot (อ่านว่า คอต)

นิยามค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้ โดยอาศัยค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

บทนิยาม 1

สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \cos\theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \text{เมื่อ} \quad \sin\theta \neq 0$$

จากบทนิยามข้างต้น จะได้ว่า

1. โดเมนของฟังก์ชัน tan และ sec คือ $\mathbb{R} - \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{(2n+1)\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}$
2. โดเมนของฟังก์ชัน cot และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{ x \mid x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \}$
3. เรนจ์ของฟังก์ชัน tan และ cot คือ $\mathbb{R}$
4. เรนจ์ของฟังก์ชัน sec และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{ x \mid -1 < x < 1 \}$

นอกจากนี้สามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ ได้ เช่น

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ } \tan\theta \neq 0$$

$$1+\tan^2\theta = \sec^2\theta \quad \text{เมื่อ } \cos\theta \neq 0$$

$$1+\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \quad \text{เมื่อ } \sin\theta \neq 0$$

ความสัมพันธ์เหล่านี้อาจพิสูจน์ได้ดังนี้

(1) จะแสดงว่า $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ เมื่อ $\tan\theta \neq 0$

$$\begin{aligned}\cot\theta &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} \\ &= \frac{1}{\tan\theta}\end{aligned}$$

(2) จะแสดงว่า $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ เมื่อ $\cos\theta \neq 0$

$$\begin{aligned}1+\tan^2\theta &= 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{\cos^2\theta} \\ &= \sec^2\theta\end{aligned}$$

สำหรับความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่ไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน โดยความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่าง ๆ นอกจากที่กล่าวมาข้างต้น จะได้กล่าวถึงในหัวข้อต่อไป

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดใหม่ทั้งหมดสามารถหาได้จากฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6

จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของ $\frac{\pi}{3}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

จะได้

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\cot\frac{\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

■

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง θ บางจำนวน เมื่อ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
0	0	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	ไม่นิยาม	1	ไม่นิยาม	0

ตัวอย่างที่ 7

จงหาค่าของ $\tan\pi$ และ $\sec\pi$

วิธีทำ $\tan\pi = \dfrac{\sin\pi}{\cos\pi} = \dfrac{0}{-1} = 0$

$\sec\pi = \dfrac{1}{\cos\pi} = \dfrac{1}{-1} = -1$ ■

ตัวอย่างที่ 8

จงหาค่าของ $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ และ $\sec\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\tan\theta$ และ $\sec\theta$ จะไม่นิยาม เมื่อ $\theta = \dfrac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $\tan\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ และ $\sec\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ไม่นิยาม ■

ตัวอย่างที่ 9

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{2}$ และ $\cot\dfrac{5\pi}{2}$

วิธีทำ $\operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{1}{\sin\dfrac{5\pi}{2}} = \dfrac{1}{\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\cot\dfrac{5\pi}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{5\pi}{2}}{\sin\dfrac{5\pi}{2}} = \dfrac{\cos\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(2\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2}}{\sin\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{0}{1} = 0$ ■

ตัวอย่างที่ 10

จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} 3\pi$ และ $\cot 3\pi$

วิธีทำ เนื่องจาก $\operatorname{cosec}\theta$ และ $\cot\theta$ จะไม่นิยาม เมื่อ $\theta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
ดังนั้น $\operatorname{cosec} 3\pi$ และ $\cot 3\pi$ ไม่นิยาม ■

ตัวอย่างที่ 11

จงหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{5\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} &= \sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6} \\
&= \sin\frac{\pi}{3}\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} \\
&= -2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} \\
&= (-2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= -\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 12

จงแสดงว่า $\tan(n\pi + \theta) = \tan\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

วิธีทำ **กรณีที่ 1** เมื่อ n เป็นจำนวนคู่
เขียน $n = 2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม
ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\tan(n\pi + \theta) &= \tan(2k\pi + \theta) \\
&= \frac{\sin(2k\pi + \theta)}{\cos(2k\pi + \theta)}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$
$$= \tan\theta$$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

เขียน $n = 2k+1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\tan(n\pi+\theta) &= \tan((2k+1)\pi+\theta) \\ &= \tan(2k\pi+\pi+\theta) \\ &= \tan(\pi+\theta) \\ &= \frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)} \\ &= \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} \\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\tan(n\pi+\theta) = \tan\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ ■

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงหาว่าจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่ยาว θ หน่วย จะอยู่ในจตุภาคใด เมื่อกำหนดให้
   1) $\sec\theta$ และ $\operatorname{cosec}\theta$ เป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่
   2) $\tan\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $\cos\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ
   3) $\sin\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $\tan\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ
   4) $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ เป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่
   5) $\cot\theta$ เป็นจำนวนจริงลบ และ $\sec\theta$ เป็นจำนวนจริงบวก

2. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงต่อไปนี้ (กรณีที่ไม่นิยาม จงให้เหตุผล)
   1) 0 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{\pi}{4}$
   4) $\frac{3\pi}{4}$ 5) $\frac{2\pi}{3}$ 6) π

7) $\frac{7\pi}{4}$ 8) $\frac{4\pi}{3}$ 9) $\frac{7\pi}{2}$

10) $\frac{5\pi}{6}$ 11) 2π 12) $-\frac{3\pi}{4}$

13) $-\frac{5\pi}{4}$ 14) $-\frac{\pi}{3}$ 15) $-\pi$

16) $-\frac{5\pi}{2}$ 17) $-\frac{7\pi}{6}$ 18) -2π

3. กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 0.6$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของ θ

4. กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{4}{5}$ จงหาค่าของ $\sec\theta + \mathrm{cosec}\,\theta$

5. กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = \frac{1}{3}$ จงหาค่าของ $2\cos\theta + \cot\theta$

6. จงหาค่าของ

1) $\cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{11\pi}{6}$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{3} - \tan\frac{5\pi}{3}$

3) $\sin\frac{3\pi}{2} + \tan\pi\cos\frac{\pi}{2} - \cot\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{7\pi}{6}$

4) $\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{5\pi}{3} + \tan\frac{9\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6}$

5) $\sin\frac{5\pi}{6} + \tan\frac{7\pi}{6} - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{4\pi}{3}$

7. จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = 1$

3) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}=\sin\frac{\pi}{2}$

4) $\cos\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{5\pi}{6}$

5) $\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{2}$

8. จงแสดงว่า $\operatorname{cosec}(2n\pi+\theta)=\operatorname{cosec}\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

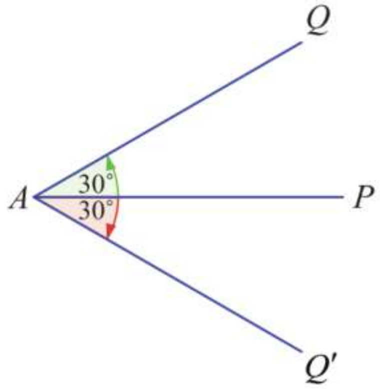
9. จงแสดงว่า $\sec(2n\pi+\theta)=\sec\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

10. จงแสดงว่า $\cot(n\pi+\theta)=\cot\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

1.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

มุมและการวัดมุม

กำหนดส่วนของเส้นตรง AP ต้องการสร้าง $P\hat{A}Q$ ให้มีขนาด 30 องศา โดยใช้โพรแทรกเตอร์วัดขนาดของมุม ทำได้โดยวางโพรแทรกเตอร์ทับส่วนของเส้นตรง AP ซึ่งสามารถวัดขนาดของมุมที่ต้องการสร้างได้ 2 แบบ คือ วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และวัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูป



รูปที่ 11

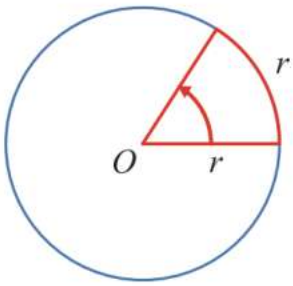
เรียกจุด A ว่า **จุดยอด (vertex)** ของมุม
เรียกส่วนของเส้นตรง AP ว่า **ด้านเริ่มต้น (initial side)** ของมุม
เรียกส่วนของเส้นตรง AQ และ AQ' ว่า **ด้านสิ้นสุด (terminal side)** ของมุม

ดังนั้น การวัดขนาดของมุมทำได้โดยการวัดจากด้านเริ่มต้นไปยังด้านสิ้นสุด สำหรับการบอกขนาดของมุมมีข้อตกลงว่า ถ้าวัดมุมในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงบวก แต่ถ้าวัดมุมในทิศทางตามเข็มนาฬิกา จะแสดงขนาดของมุมด้วยจำนวนจริงลบ

หน่วยในการวัดมุมที่รู้จักกันแล้ว คือ **องศา (degree)** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ ° โดยมุมที่ด้านเริ่มต้นและด้านสิ้นสุดทับกันมีขนาด 0 องศา หรือ 360 องศา และแบ่งหน่วยองศาออกเป็นหน่วยย่อยคือ ลิปดา (′) และพิลิปดา (″) ดังนี้

$$1^\circ = 60'$$
$$1' = 60''$$

หน่วยวัดมุมที่สำคัญอีกหน่วยหนึ่งคือ **เรเดียน (radian)**



รูปที่ 12

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลมนั้นเป็นมุมที่มีขนาด 1 เรเดียน

เนื่องจากวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย จะมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หน่วย ดังนั้น มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว $2\pi r$ หน่วย จึงมีขนาด $\frac{2\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ 2π เรเดียน และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งครึ่งวงกลมที่ยาว πr หน่วย จะมีขนาด $\frac{\pi r}{r}$ เรเดียน หรือ π เรเดียน

สำหรับมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย จะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน และถ้าให้ขนาดของมุมดังกล่าวเป็น θ เรเดียน จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

เนื่องจากมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว r หน่วย มีขนาด 2π เรเดียน หรือ 360 องศา ดังนั้น

360 องศา เท่ากับ 2π เรเดียน

หรือ 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น 1 องศา $= \frac{\pi}{180}$ เรเดียน ≈ 0.01745 เรเดียน

และ 1 เรเดียน $= \frac{180}{\pi}$ องศา $\approx 57.3^\circ$ หรือ $57^\circ 18'$

โดยทั่วไปการเขียนขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนมักจะไม่เขียนหน่วยกำกับไว้ ดังนั้น ถ้ากล่าวถึงขนาดของมุมโดยไม่มีหน่วยกำกับ ให้ถือว่ามุมนั้นมีหน่วยเป็นเรเดียน

จากความสัมพันธ์ระหว่างขนาดของมุมในหน่วยองศาและหน่วยเรเดียนที่กล่าวมาข้างต้น จะได้ว่าเมื่อทราบขนาดของมุมในหน่วยใดหน่วยหนึ่งแล้วจะสามารถหาขนาดของมุมนั้นในอีกหน่วยได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 13

มุมที่มีขนาด $\frac{1}{2}$ เรเดียน มีขนาดกี่องศา

วิธีทำ เนื่องจาก π เรเดียน เท่ากับ 180 องศา

ดังนั้น $\frac{1}{2}$ เรเดียน เท่ากับ $\frac{1}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right)$ องศา

เนื่องจาก $\frac{1}{2}\left(\frac{180}{\pi}\right) = \frac{90}{\pi} \approx 28.65$

ดังนั้น มุมที่มีขนาด $\frac{1}{2}$ เรเดียน มีขนาดเท่ากับ $\frac{90}{\pi}$ องศา ■

ตัวอย่างที่ 14

มุมที่มีขนาด 75 องศา มีขนาดกี่เรเดียน

วิธีทำ เนื่องจาก 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

ดังนั้น 75 องศา เท่ากับ $75\left(\frac{\pi}{180}\right)$ เรเดียน

เนื่องจาก $75\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{5\pi}{12}$

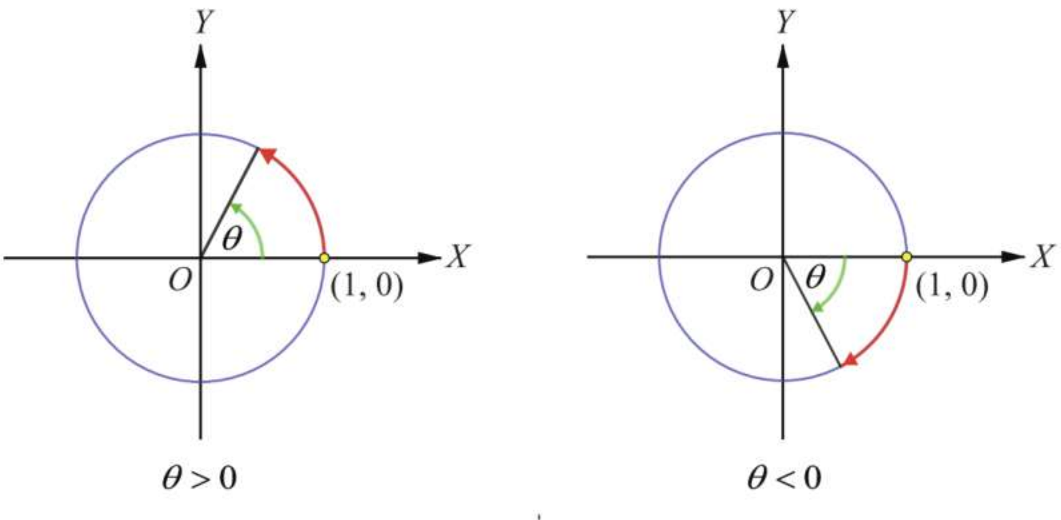
ดังนั้น มุมที่มีขนาด 75 องศา มีขนาดเท่ากับ $\frac{5\pi}{12}$ เรเดียน ■

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กล่าวมาแล้วนั้น เป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

เมื่อจุดยอดของมุมอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และด้านเริ่มต้นของมุมนั้นทาบไปตามแกน X ทางบวก จะกล่าวว่ามุมนั้นอยู่ใน **ตำแหน่งมาตรฐาน (standard position)**

สมมติว่า มุมหนึ่งมีขนาด θ เรเดียน อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ดังรูป



รูปที่ 13

เนื่องจากส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียนนั้น ยาว 1 หน่วย ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

จะเห็นว่า จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยนั้นมีเพียงจุดเดียวและเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางที่สอดคล้องกับ θ เช่น จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุม $-\frac{\pi}{4}$ เรเดียน ตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วย คือ จุด $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ซึ่งเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้งที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ในทิศทางตามเข็มนาฬิกา ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย

ดังนั้น เมื่อกำหนดมุมขนาด θ เรเดียนให้หนึ่งมุม จะหาจุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมนั้นตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยได้เพียงจุดเดียว และจุดนั้นจะเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วยด้วย หรือส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม θ เรเดียน จะยาว $|\theta|$ หน่วย จะเห็นได้ว่า ไม่ว่าจะใช้วิธีวัดมุมหรือวัดความยาวส่วนโค้งของวงกลม จุดที่ด้านสิ้นสุดของมุมตัดกับวงกลมหนึ่งหน่วยจะเป็นจุดเดียวกับจุดปลายส่วนโค้ง

จึงสรุปได้ว่า ไม่ว่าจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติในแง่ของมุมหรือในแง่ของความยาวส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนเหล่านั้นจะเท่ากัน เช่น $\cos\theta$ อาจหมายถึง $\cos$ ของมุมที่มีขนาด θ เรเดียน หรือ $\cos$ ของจำนวนจริง θ ก็ได้

ในการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศานั้นอาจหาได้โดยเปลี่ยนหน่วยวัดขนาดของมุมจากหน่วยองศาให้เป็นหน่วยเรเดียนก่อน แล้วจึงหาค่าของฟังก์ชันนั้นเช่นเดียวกับการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงทั่ว ๆ ไป

ตัวอย่างที่ 15

จงหาค่าของ $\sin 60^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ เรเดียน

ดังนั้น $\sin 60^\circ = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 16

จงหาค่าของ $\sec(-405^\circ)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sec(-405^\circ) = \frac{1}{\cos(-405^\circ)}$

และ

$$\begin{aligned}\cos(-405^\circ) &= \cos 405^\circ \\ &= \cos(360^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \\ &= \cos\frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sec(-405^\circ) = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$ ■

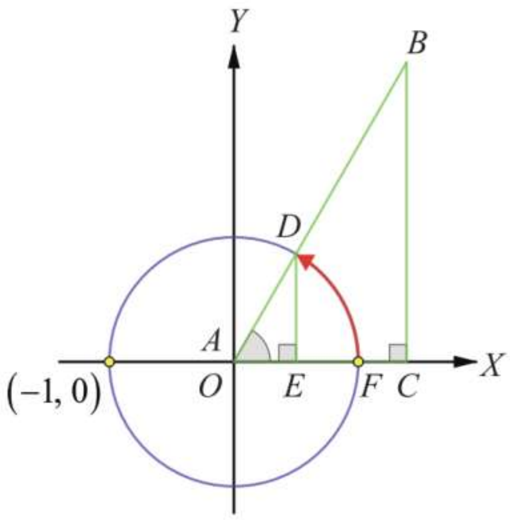
ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ประโยชน์ที่สำคัญประการหนึ่งของฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ การนำไปใช้ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ต่อไปนี้จะพิจารณาฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $B\hat{A}C < 90°$

ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ

ให้ $B\hat{A}C$ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน และส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุม A คือ ส่วนโค้ง FD ดังรูป



รูปที่ 14

ดังนั้น $\sin A = \sin$ (ความยาวส่วนโค้ง FD) $= DE$

$\cos A = \cos$ (ความยาวส่วนโค้ง FD) $= AE$

เนื่องจากรูปสามเหลี่ยม ADE คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ABC

จะได้ $\frac{DE}{AD} = \frac{BC}{AB}$ และ $\frac{AE}{AD} = \frac{AC}{AB}$

แต่ $AD = 1$

ดังนั้น $DE = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ และ $AE = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

นั่นคือ $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$ และ $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a}{b}$

สรุปได้ว่า

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

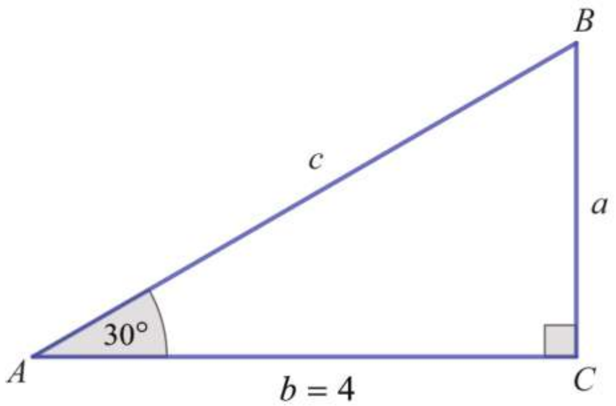
$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม } A}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม } A}$$

ส่วนค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ของมุม A จะเป็นส่วนกลับของค่าของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ตามลำดับ สมการข้างต้นมีประโยชน์ในการหาส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 17

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $A\hat{C}B$ เป็นมุมฉาก ด้าน AC ยาว 4 หน่วย และมุม A มีขนาด $30°$ จงหาความยาวของด้าน AB และ BC

วิธีทำ ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ



เนื่องจาก $\cos 30° = \frac{4}{c}$

จะได้ $c = \frac{4}{\cos 30°} = \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{8}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

เนื่องจาก $\tan 30° = \frac{a}{4}$

จะได้ $a = 4\tan 30° = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

ดังนั้น ด้าน AB และ BC ยาว $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ และ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ หน่วย ตามลำดับ ■

ตัวอย่างที่ 18

ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\sin A = \frac{3}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

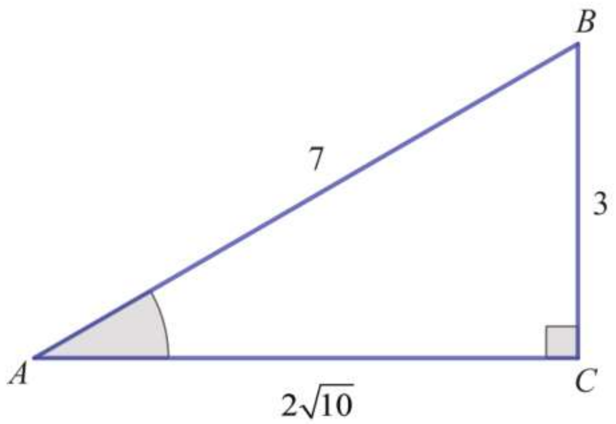
วิธีทำ จาก $\sin A = \frac{3}{7}$ สามารถกำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก

โดยให้ด้านตรงข้ามมุม A ยาว 3 หน่วย และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 7 หน่วย

นั่นคือ ถ้าให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ

จะได้ว่า $a = 3$ และ $c = 7$

จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส จะได้ว่า $b = \sqrt{7^2 - 3^2} = 2\sqrt{10}$ จึงเขียนรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ได้ดังรูป



ดังนั้น

$$\sin A = \frac{3}{7}, \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{7}{3}$$

$$\cos A = \frac{2\sqrt{10}}{7}, \qquad \sec A = \frac{7}{2\sqrt{10}} = \frac{7\sqrt{10}}{20}$$

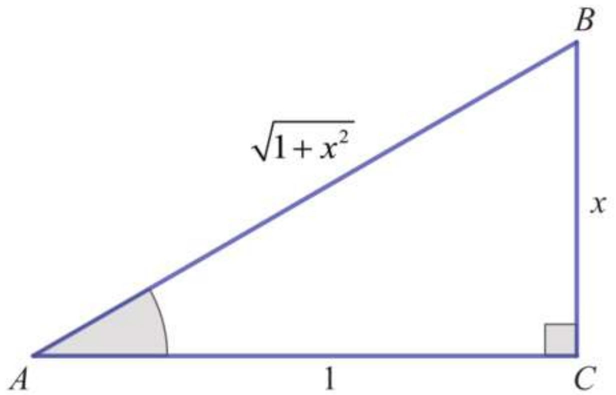
$$\tan A = \frac{3}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{20}, \qquad \cot A = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

■

ตัวอย่างที่ 19

ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\tan A = x$ โดยที่ $x \neq 0$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

วิธีทำ กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก
ให้ a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC ตามลำดับ
จาก $\tan A = x$ จะได้ว่าค่าของ a และ b คู่หนึ่งที่เป็นไปได้ คือ $a = x$ และ $b = 1$
ซึ่งทำให้ได้ว่า $c = \sqrt{1+x^2}$ ดังรูป



ดังนั้น

$$\sin A = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sec A = \sqrt{1+x^2}$$

$$\tan A = x, \qquad \cot A = \frac{1}{x}$$

■

แบบฝึกหัด 1.3

1. ขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นเรเดียนต่อไปนี้ มีขนาดกี่องศา

1) 4π
2) $-\frac{7\pi}{4}$
3) $-\frac{2\pi}{3}$
4) $-\frac{5\pi}{6}$
5) $\frac{11\pi}{5}$
6) 3

2. ขนาดของมุมที่มีหน่วยเป็นองศาต่อไปนี้ มีขนาดกี่เรเดียน

1) 300°
2) -112°
3) -315°
4) 880°
5) -500°
6) 740°

3. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีมุมสองมุมที่มีขนาด 36° และ $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน จงหาขนาดของมุมที่เหลือในหน่วยเรเดียน

4. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของมุมต่อไปนี้

1) 150°
2) 120°
3) 315°
4) -315°
5) 930°

5. ถ้ามุมอยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน จงหาว่าด้านสิ้นสุดของมุมขนาด θ ในแต่ละข้ออยู่ในจตุภาคใด

1) $\sin\theta = \frac{5}{13}$
2) $\cos\theta = -\frac{4}{5}$
3) $\tan\theta = -2$
4) $\tan\theta = \frac{7}{24}$
5) $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

6. จงหาค่าของ

1) $\dfrac{3\tan^2 135° - \sec^2 300°}{2\sin 330°}$ 2) $\dfrac{\tan(-480°) - \sin(-840°)}{\cos(-390°)}$

7. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด 20 องศา และมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้าน AC และ BC

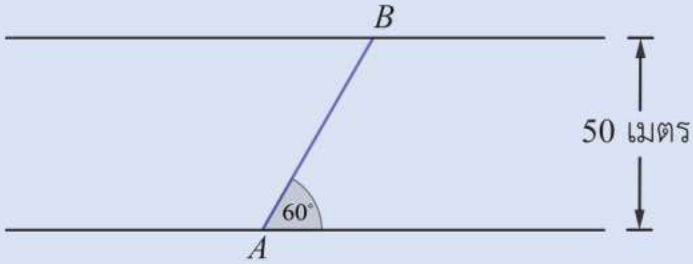
8. ให้มุม A เป็นมุมแหลม และ $\cos A = \dfrac{4}{7}$ จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ของมุม A

9. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ลากส่วนของเส้นตรงจากจุด C มาตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D ถ้าด้าน AC และ BC ยาว 10 และ 12 หน่วย ตามลำดับ จงหาค่าของ $\sin A, \cos A, \tan A, \sin B, \cos B, \tan B$ และความยาวของด้าน CD และ DB

10. กำหนดให้ $\sin\theta = \dfrac{1}{3}$ และ $\sec\theta < 0$ จงหาค่าของ $\tan\theta$

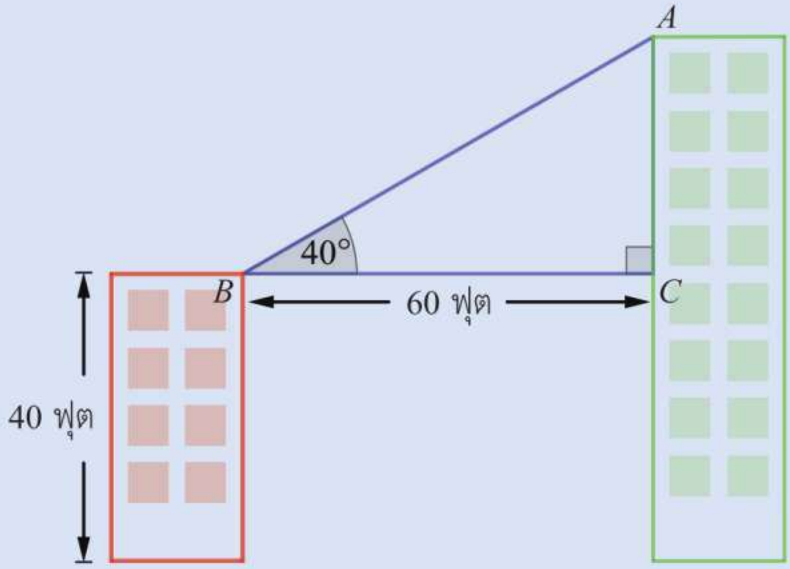
11. กำหนดให้ $\cot\theta = 5$ และ $\sin\theta < 0$ จงหาค่าของ $\cos\theta$

12. แม่น้ำสายหนึ่งกว้าง 50 เมตร นักว่ายน้ำว่ายจากจุด A ของฝั่งหนึ่งไปยังจุด B ของอีกฝั่งหนึ่งตามเส้นทางดังรูป จงหาระยะทางที่นักว่ายน้ำว่ายข้ามฝั่ง

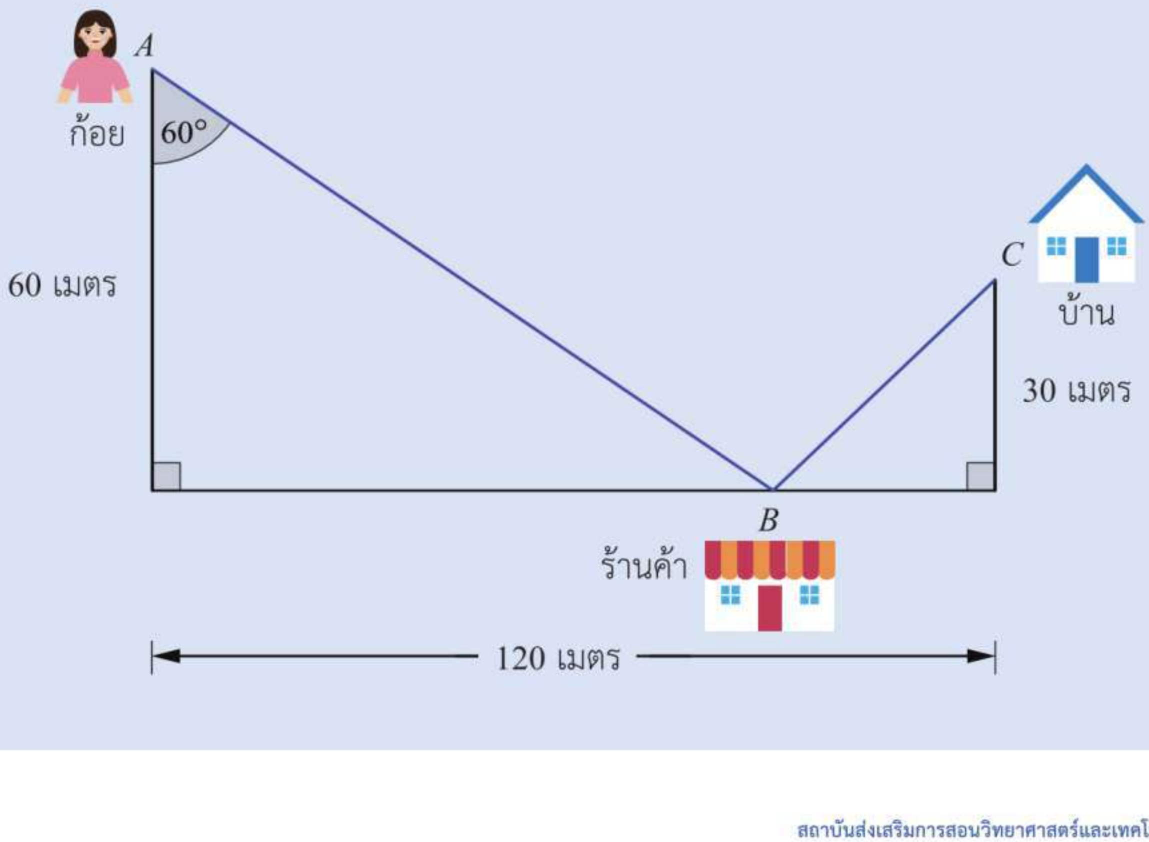


13. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มุม A มีขนาด 70 องศา มุม C มีขนาด 50 องศา และด้าน AB ยาว 5 เซนติเมตร ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุด B มาตั้งฉากกับด้าน AC ที่จุด P จงหาความยาวของด้าน BP, BC, AP, PC และ AC

14. ตึกสองหลังตั้งอยู่ห่างกัน 60 ฟุต โดยตึกที่เตี้ยกว่าสูง 40 ฟุต และมุม ABC มีขนาด 40 องศา ดังรูป จงหาความสูงของตึกที่สูงกว่า



15. กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.73$ จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดที่ก้อยจะเดินจากโรงเรียนที่จุด A ไปซื้อของที่ร้านค้าที่จุด B แล้วเดินกลับบ้านที่จุด C ดังรูป



1.4 กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

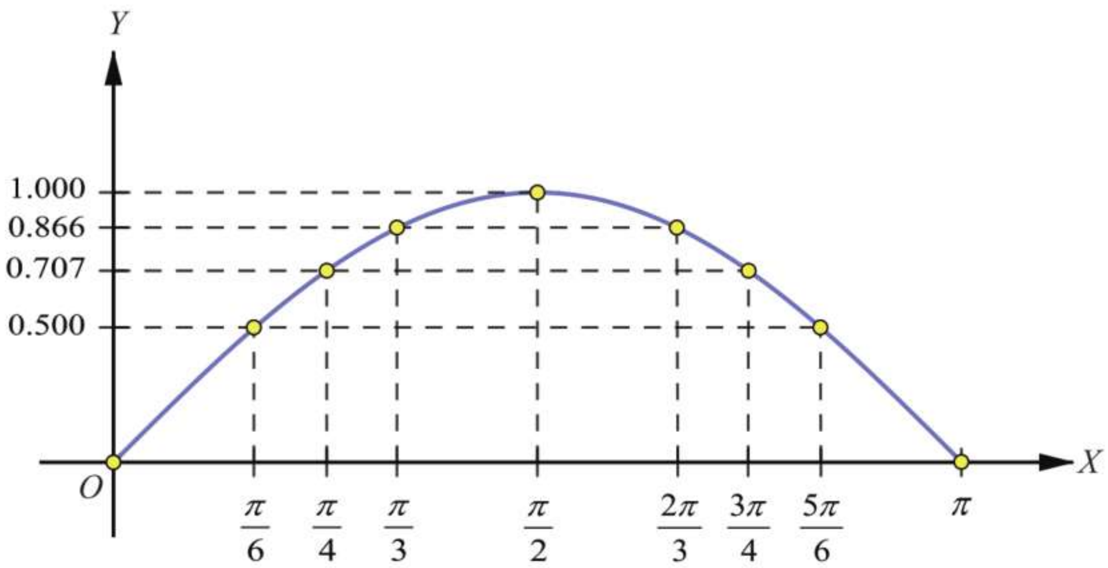
กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ โดยเฉพาะกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์เป็นกราฟที่มีความสำคัญมากทั้งในวิชาคณิตศาสตร์และวิชาอื่น ๆ เช่น ในวิชาฟิสิกส์เรื่องกลศาสตร์ คลื่นแสง คลื่นเสียง คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า ดังนั้น จึงควรศึกษาลักษณะและการเขียนกราฟของฟังก์ชันทั้งสองและฟังก์ชันอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องดังนี้

การเขียนกราฟของ $y = \sin x$ เขียนได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

จะได้ กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$ เป็นดังนี้



รูปที่ 15

เนื่องจากเรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1 ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์จึงมีค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ซึ่งค่าของ $\sin x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π จะมีค่าเพิ่มขึ้นหรือลดลงดังแสดงในตารางต่อไปนี้

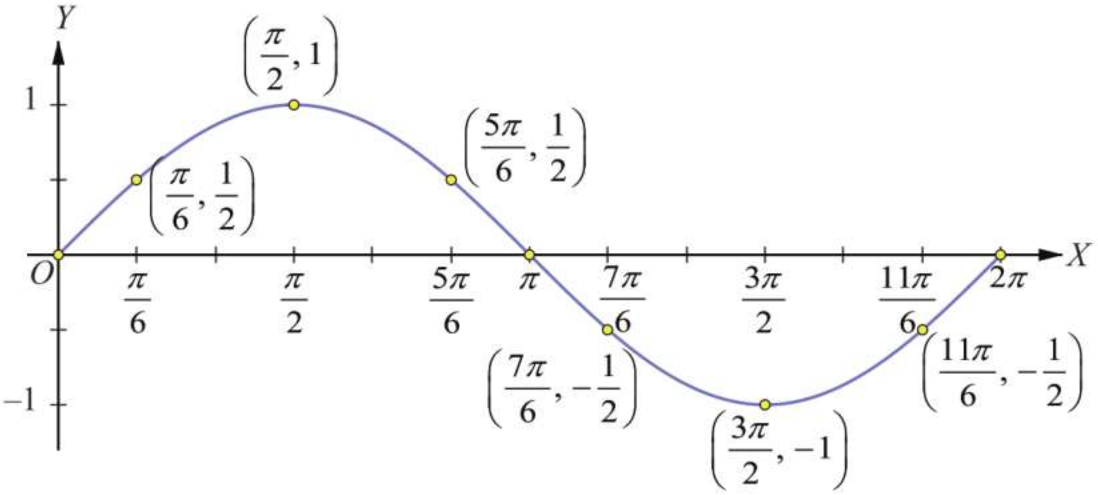
x	$\sin x$
$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$	เพิ่มขึ้นจาก 0 ไปถึง 1
$\frac{\pi}{2} \le x \le \pi$	ลดลงจาก 1 ไปถึง 0
$\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$	ลดลงจาก 0 ไปถึง -1
$\frac{3\pi}{2} \le x \le 2\pi$	เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 0

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ ได้ดังตาราง

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0

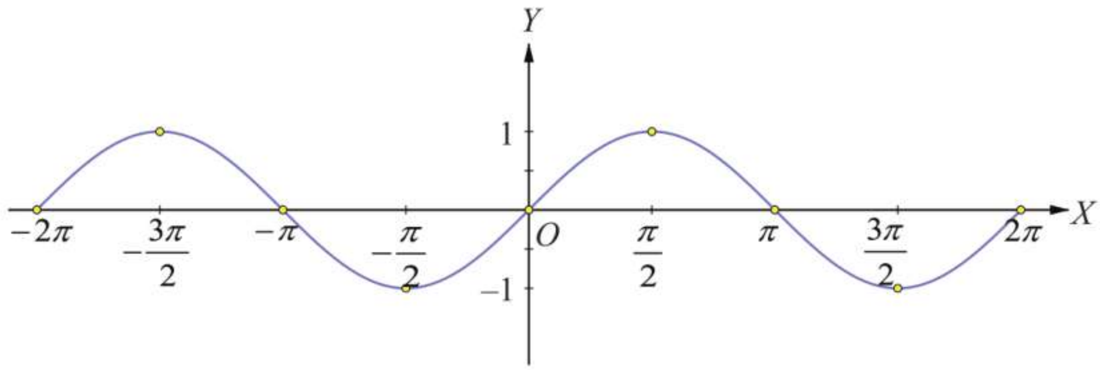
จะได้ กราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$ เป็นดังนี้



รูปที่ 16

จากที่ทราบมาแล้วว่า $\sin(2n\pi + x) = \sin x$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม สมบัตินี้เป็นสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของฟังก์ชันไซน์ ทำให้กราฟของฟังก์ชันไซน์มีลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ซึ่งช่วยให้การเขียนกราฟง่ายขึ้น

จะได้ กราฟของ $y = \sin x$ เป็นดังนี้



รูปที่ 17

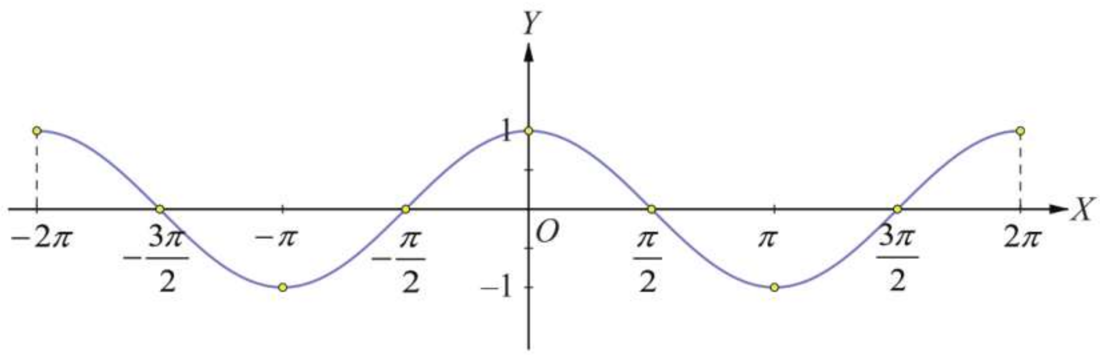
จากกราฟ จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์ คือ $[-1, 1]$
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$
กราฟของฟังก์ชันไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

ในทำนองเดียวกันกับการเขียนกราฟของ $y = \sin x$ จะเขียนกราฟของ $y = \cos x$ ได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \cos x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

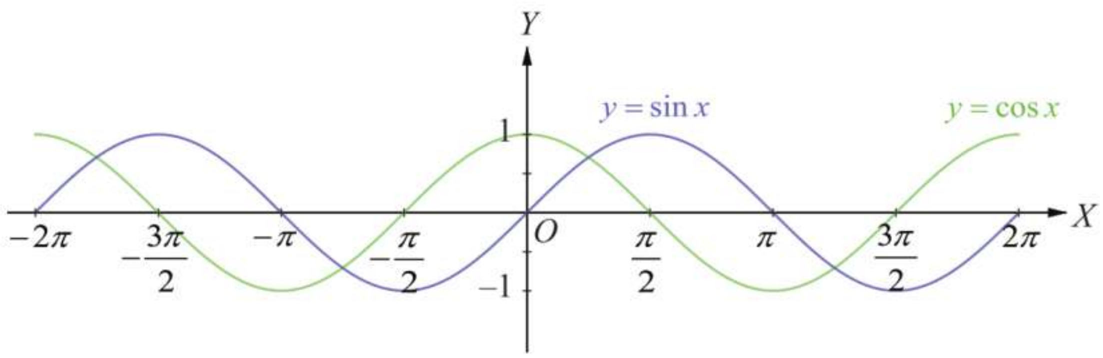
จะได้ กราฟของ $y = \cos x$ เป็นดังนี้



รูปที่ 18

จากกราฟ จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชันโคไซน์ คือ เซตของจำนวนจริง
เรนจ์ของฟังก์ชันโคไซน์ คือ $[-1, 1]$
กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
กราฟของฟังก์ชันโคไซน์ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็น **ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)** กล่าวคือ สามารถแบ่งแกน X ออกเป็น **ช่วงย่อย (subinterval)** โดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากันและกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าวเรียกว่า **คาบ (period)** ของฟังก์ชัน เช่น กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ในช่วง $\ldots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \ldots$ เป็นช่วงที่สั้นที่สุดที่แบ่งแล้วทำให้กราฟในแต่ละช่วงเหล่านั้นมีลักษณะเหมือนกัน คาบของฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จึงเท่ากับ 2π ดังรูป



รูปที่ 19

สำหรับฟังก์ชันที่เป็นคาบซึ่งมีค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะเรียกค่าที่เท่ากับครึ่งหนึ่งของผลต่างระหว่างค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชันนั้นว่า **แอมพลิจูด (amplitude)**
นั่นคือ ถ้า a เป็นค่าสูงสุด และ b เป็นค่าต่ำสุดของฟังก์ชันที่เป็นคาบ แล้วจะได้ว่าแอมพลิจูดของฟังก์ชันนี้ คือ $\frac{1}{2}(a-b)$
ดังนั้น ฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ มีแอมพลิจูดเป็น 1 เท่ากัน

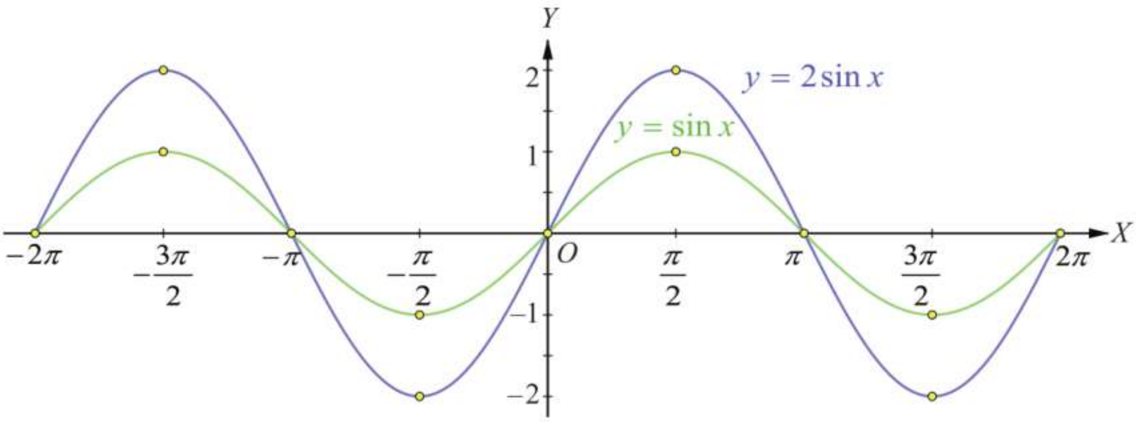
ตัวอย่างที่ 20

จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	−1	0	1	0	−1	0
$2\sin x$	0	2	0	−2	0	2	0	−2	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = 2\sin x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน คือ จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$

โดเมนของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ คือ $[-2, 2]$

คาบของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ คือ 2π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = 2\sin x$ คือ $\frac{2-(-2)}{2} = 2$ ■

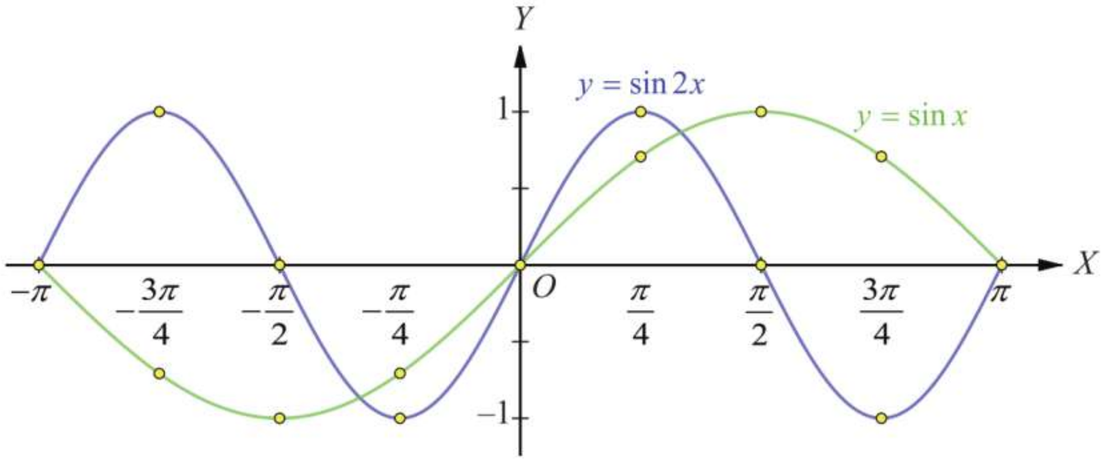
ตัวอย่างที่ 21

จงเขียนกราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \sin x$ และ $y = \sin 2x$ ได้ดังตาราง

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin x$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y = \sin 2x$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ

$\ldots, -2\pi, -\frac{3\pi}{2}, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$

โดเมนของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y = \sin 2x$ คือ $\frac{1-(-1)}{2} = 1$ ■

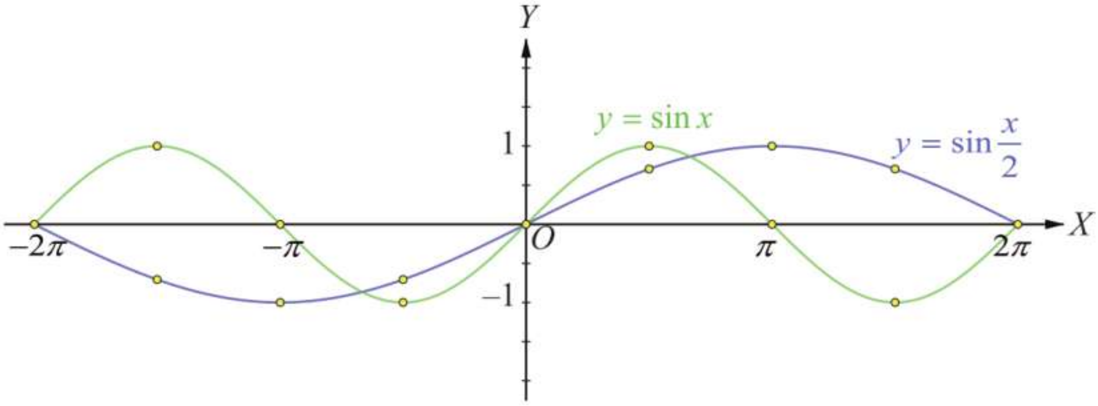
ตัวอย่างที่ 22

จงเขียนกราฟของ $y=\sin x$ และ $y=\sin\frac{x}{2}$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน พร้อมทั้งหาจุดตัดแกน X โดเมน เรนจ์ คาบ และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y=\sin\frac{x}{2}$

วิธีทำ กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y=\sin x$ และ $y=\sin\frac{x}{2}$ ได้ดังตาราง

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
$\sin\frac{x}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

จากตารางสามารถเขียนกราฟได้ดังนี้



จากกราฟ จะเห็นว่า กราฟของ $y=\sin\frac{x}{2}$ ตัดแกน X ที่จุด $(x, 0)$ เมื่อ x คือ $\ldots, -4\pi, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$

โดเมนของฟังก์ชัน $y=\sin\frac{x}{2}$ คือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชัน $y=\sin\frac{x}{2}$ คือ $[-1, 1]$

คาบของฟังก์ชัน $y=\sin\frac{x}{2}$ คือ 4π

และแอมพลิจูดของฟังก์ชัน $y=\sin\frac{x}{2}$ คือ $\frac{1-(-1)}{2}=1$ ■

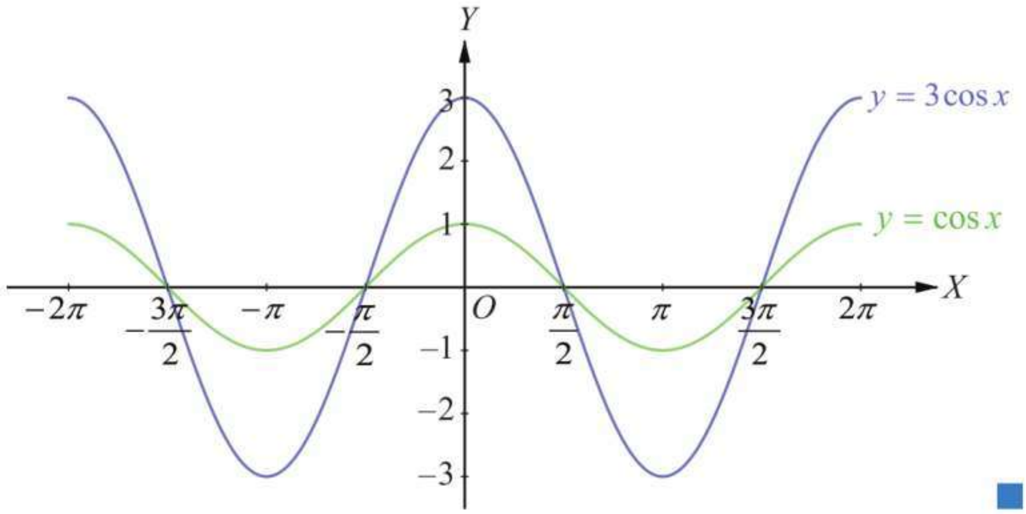
ในกรณีทั่วไป จะได้ว่า

ฟังก์ชัน	โดเมน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$y=\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1,1]$
$y=a\sin(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert]$
$y=a\cos(nx),\ n>0$	$\mathbb{R}$	$\frac{2\pi}{n}$	$\lvert a\rvert$	$[-\lvert a\rvert, \lvert a\rvert]$

ตัวอย่างที่ 23

จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชัน $y=3\cos x$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของ $y=\cos x$ และ $y=3\cos x$ ในระบบพิกัดฉากเดียวกัน

วิธีทำ จาก $y=3\cos x$ จะได้ คาบ คือ 2π แอมพลิจูด คือ 3 และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$
เขียนกราฟของ $y=\cos x$ และ $y=3\cos x$ ได้ดังนี้



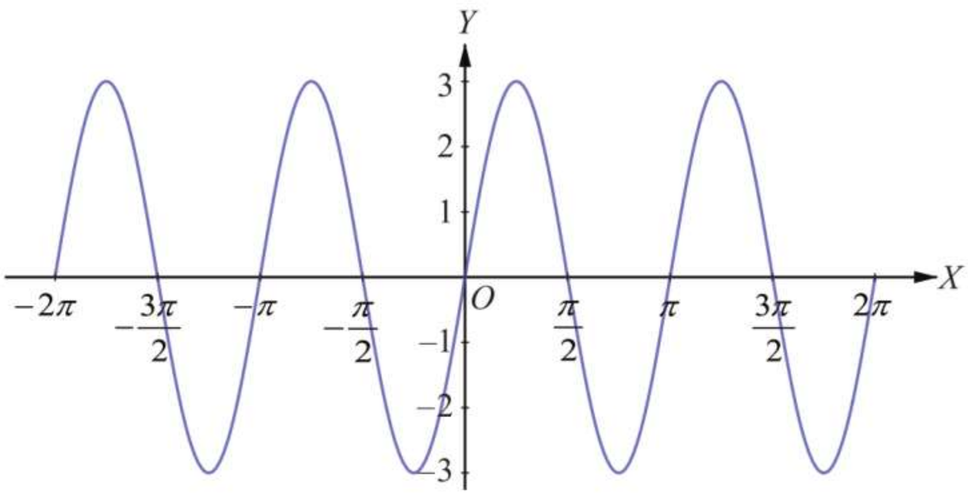
ข้อสังเกต จากตัวอย่างข้างต้นกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = 3\cos x$ ตัดแกน X ที่จุดเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 24

จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชัน $y = 3\sin 2x$ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

วิธีทำ จาก $y = 3\sin 2x$ จะได้ คาบ คือ $\frac{2\pi}{2} = \pi$ แอมพลิจูด คือ 3 และเรนจ์ คือ $[-3, 3]$

เขียนกราฟของ $y = 3\sin 2x$ ได้ดังนี้



■

ก่อนจะเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ให้พิจารณาโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

โดเมนของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ คือ $\mathbb{R}$

โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ คือ $\left\{x \;\middle|\; x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันเซแคนต์ คือ $\left\{x \;\middle|\; x \neq n\pi + \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}\right\}$

โดเมนของฟังก์ชันโคแทนเจนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

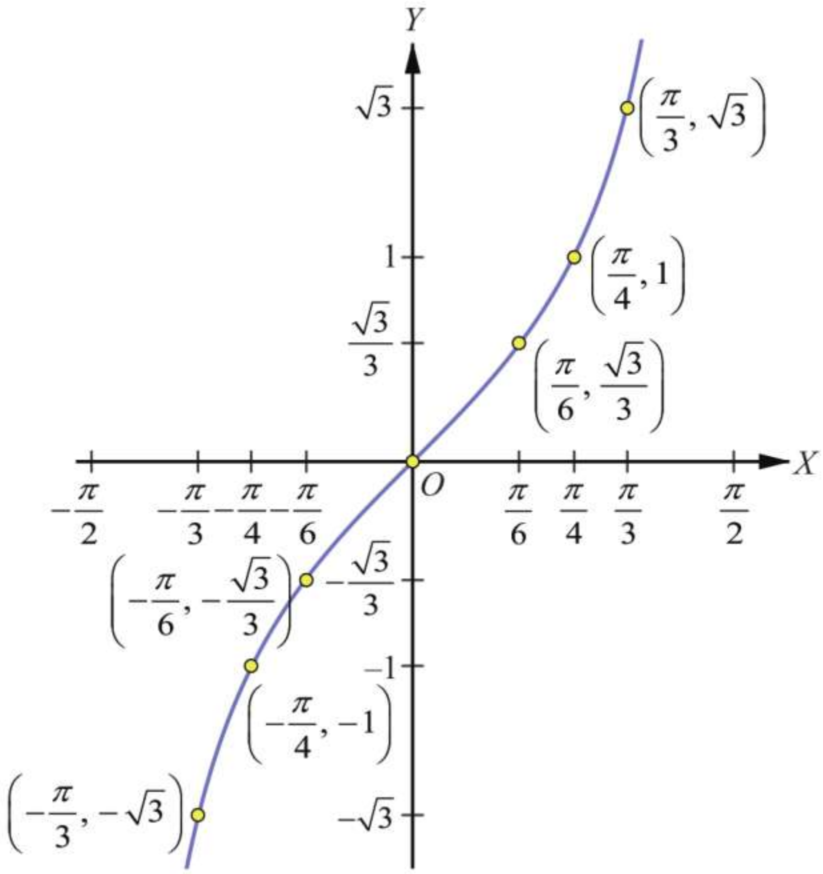
โดเมนของฟังก์ชันโคเซแคนต์ คือ $\{x \mid x \neq n\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$

การเขียนกราฟของ $y = \tan x$ เขียนได้ดังนี้

กำหนดค่า x และหาค่า y จาก $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ได้ดังตาราง

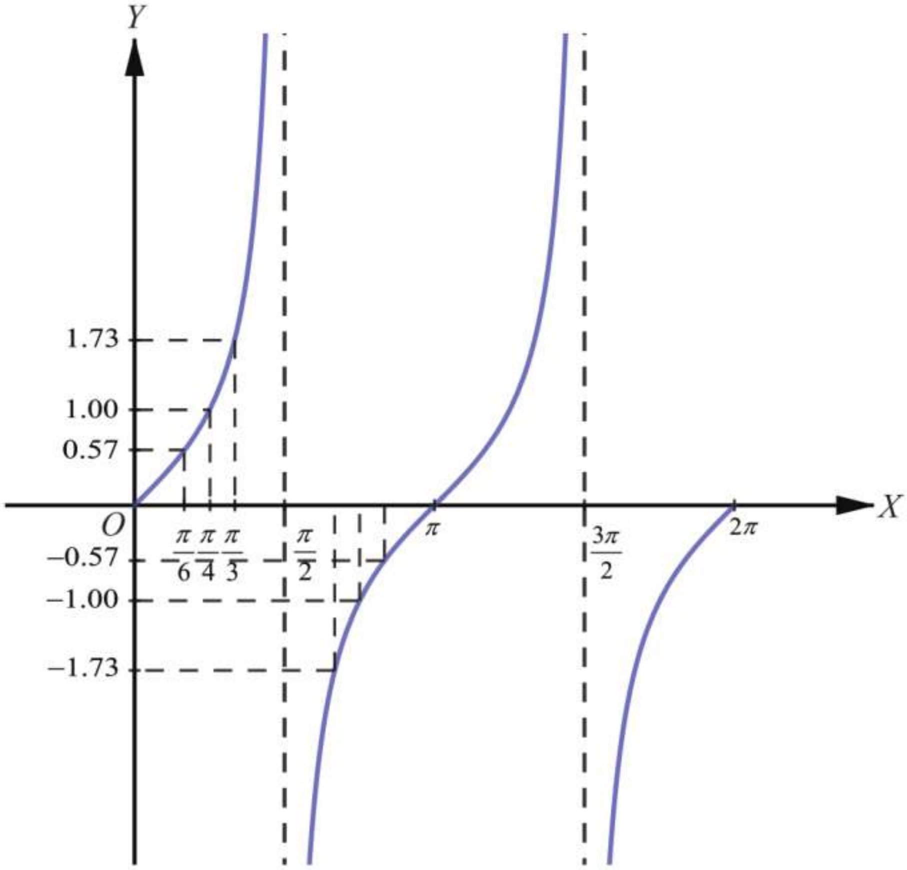
x	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

จะได้ กราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ เป็นดังนี้



รูปที่ 20

พิจารณากราฟของ $y = \tan x$ เมื่อ $0 \le x \le 2\pi$



รูปที่ 21

จากรูป จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0 และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่ $x = \frac{\pi}{2}$

เมื่อ x มีค่าลดลงจาก π และเข้าใกล้ $\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบและลดลงเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{\pi}{2}$

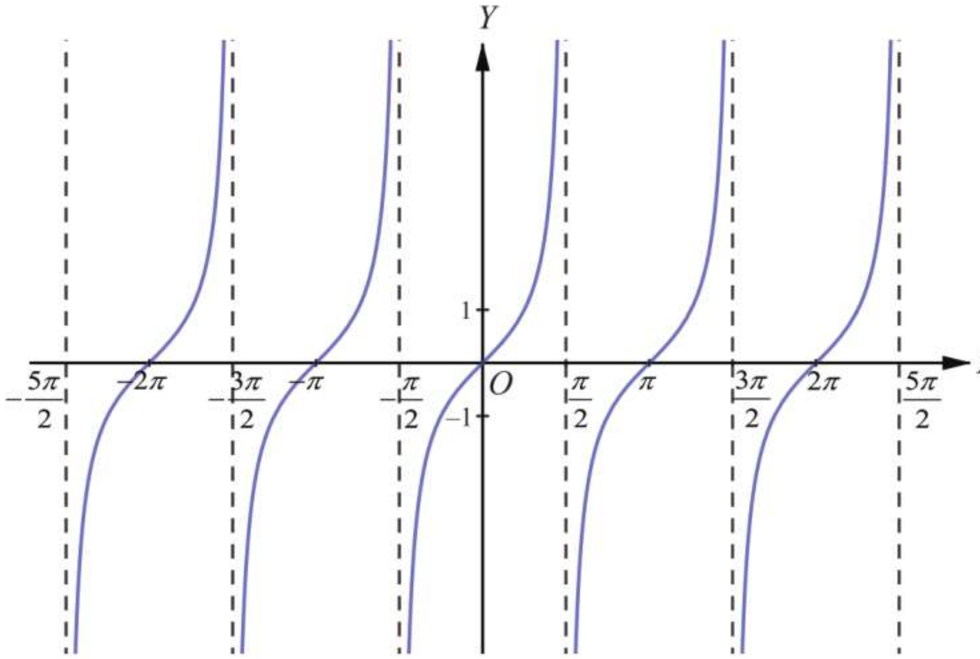
ในทำนองเดียวกัน เมื่อ x มีค่าเพิ่มขึ้นจาก π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงบวกและเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$ แต่ $\tan x$ ไม่นิยามที่ $x = \frac{3\pi}{2}$

เมื่อ x มีค่าลดลงจาก 2π และเข้าใกล้ $\frac{3\pi}{2}$ ค่าของ $\tan x$ จะเป็นจำนวนจริงลบและลดลงเรื่อย ๆ โดยเส้นกราฟจะโค้งเข้าหาเส้นตรง $x = \frac{3\pi}{2}$

ดังนั้น ในการเขียนกราฟดังกล่าว ถ้าลากเส้นประ $x = \frac{\pi}{2}$ และ $x = \frac{3\pi}{2}$ ก่อน จะช่วยให้เขียนกราฟได้ง่ายขึ้น แต่เส้นประดังกล่าวนั้นมิได้เป็นส่วนหนึ่งของกราฟ

เนื่องจาก $\tan(n\pi + \theta) = \tan\theta$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ กราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์จึงมีลักษณะซ้ำกันเป็นช่วง ๆ ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์จึงเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ

จะได้ กราฟของ $y = \tan x$ เป็นดังนี้

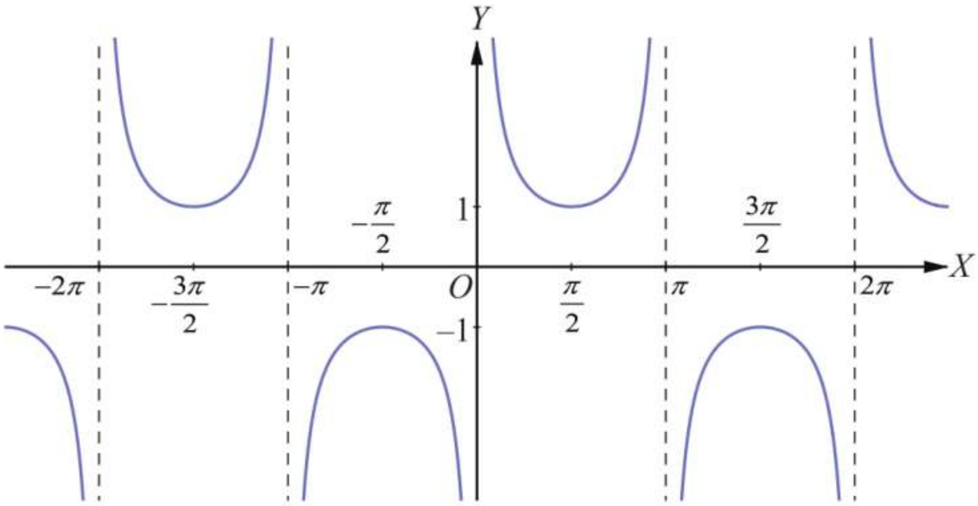


รูปที่ 22

จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

เนื่องจากค่าของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ที่ x เป็นส่วนกลับของค่าของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ที่ x ตามลำดับ จึงสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันโคเซแคนต์ ฟังก์ชันเซแคนต์ และฟังก์ชันโคแทนเจนต์ ได้ดังนี้

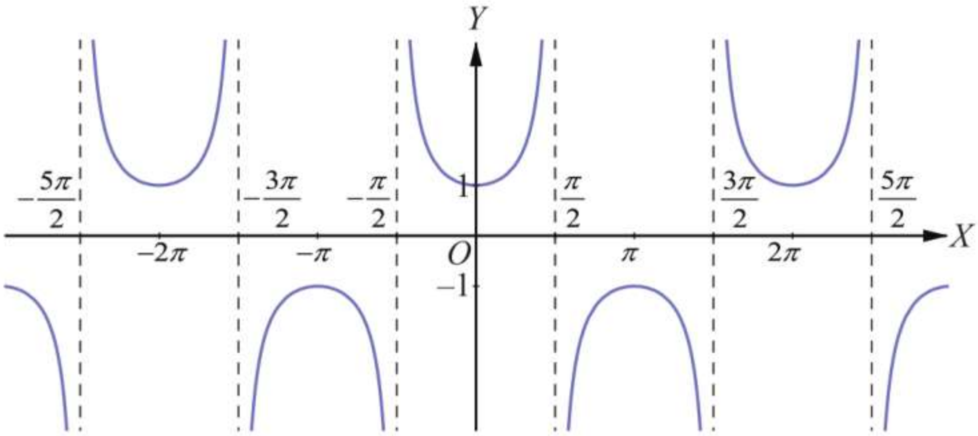
กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$



รูปที่ 23

จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

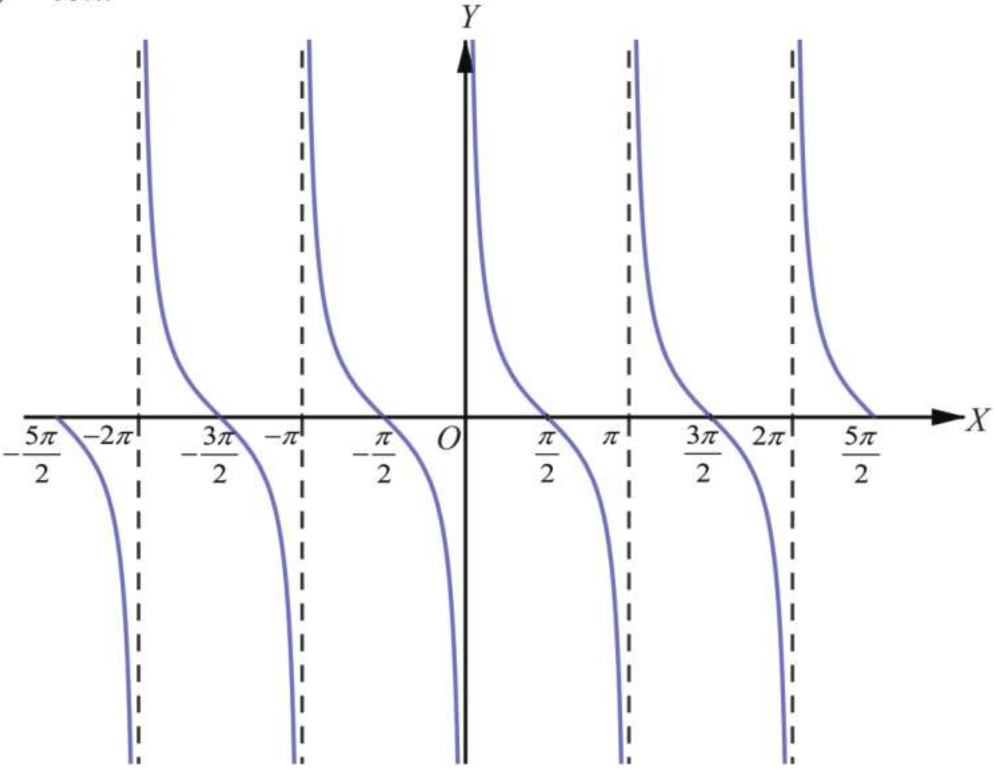
กราฟของ $y = \sec x$



รูปที่ 24

จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันเซแคนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ 2π

กราฟของ $y = \cot x$



รูปที่ 25

จากรูป จะเห็นว่า ฟังก์ชันโคแทนเจนต์เป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ π

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1) $y = \frac{1}{2}\sin\theta$

2) $y = 3\sin\theta$

3) $y = 3\sin\frac{1}{2}\theta$

4) $y = 4\cos 3\theta$

5) $y = -\frac{1}{2}\sin 4\theta$

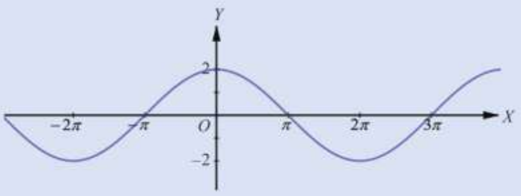
6) $y = -2\cos\frac{1}{2}\theta$

2. จงจับคู่ฟังก์ชันกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

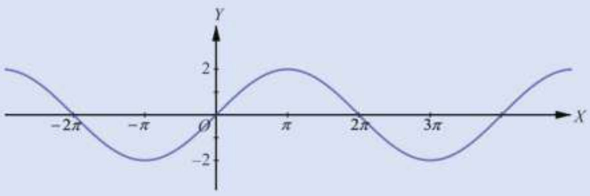
1) $y = 2\sin\frac{\pi}{2}x$ 2) $y = 2\cos\frac{\pi}{2}x$ 3) $y = 2\cos\frac{1}{2}x$

4) $y = 3\cos 2x$ 5) $y = -3\sin 2x$ 6) $y = 2\sin\frac{1}{2}x$

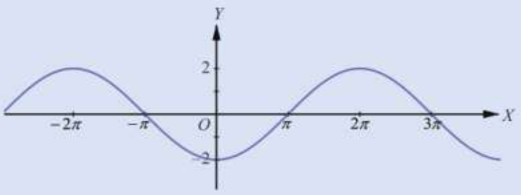
7) $y = -2\cos\frac{1}{2}x$ 8) $y = -2\cos\frac{\pi}{2}x$ 9) $y = -2\sin\frac{1}{2}x$



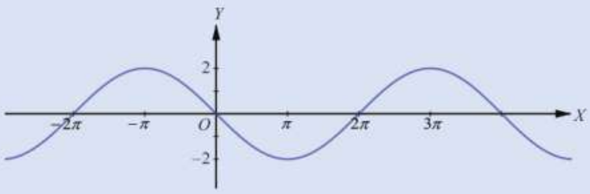
(ก)



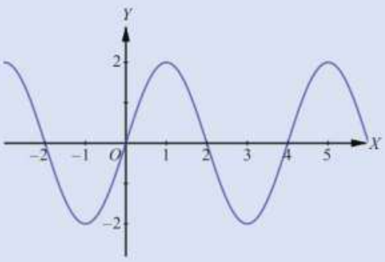
(ข)



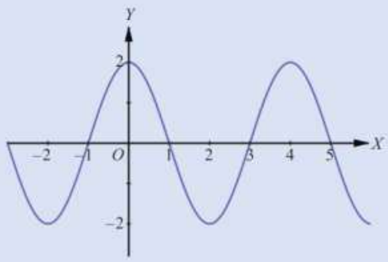
(ค)



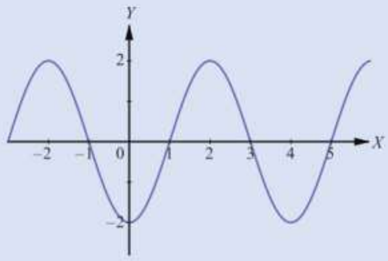
(ง)



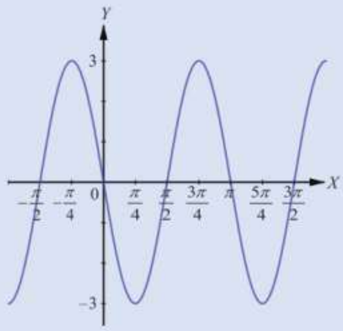
(จ)



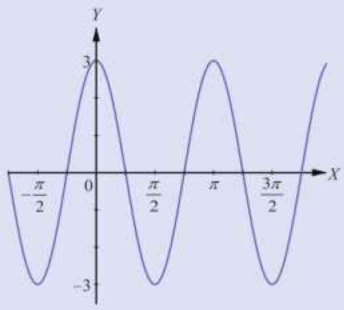
(ฉ)


Y
X
2
−2
−2
−1
0
1
2
3
4
5

(ช)


Y
X
3
−3
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{4}$
0
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
$\frac{5\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$

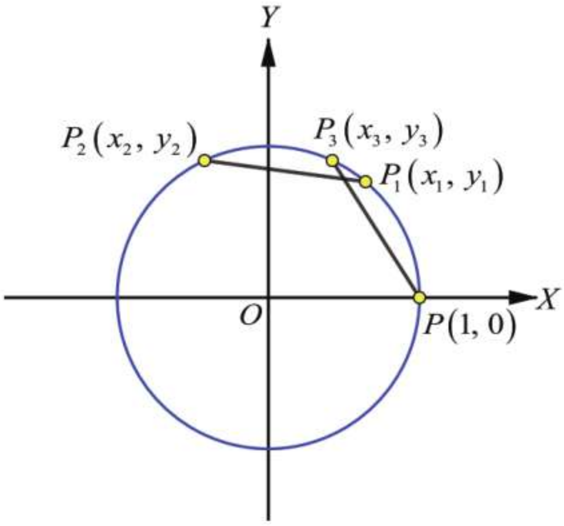
(ซ)


Y
X
3
−3
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

(ฌ)

1.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

ในหัวข้อนี้จะศึกษาฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม โดยสิ่งแรกที่จะพิจารณา คือ ค่าของฟังก์ชันโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวน หรือมุมสองมุม นั่นคือ พิจารณาค่าของ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ



รูปที่ 26

กำหนดให้ P, P_1 และ P_2 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย

ให้ส่วนโค้ง PP_1 ยาว β หน่วย และส่วนโค้ง PP_2 ยาว α หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้ง P_1P_2 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้ P_3 เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ทำให้ส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น ส่วนโค้ง PP_3 ยาว $\alpha-\beta$ หน่วย

ให้พิกัดของจุด P_1, P_2 และ P_3 เป็น $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) ตามลำดับ

เนื่องจากส่วนโค้ง PP_3 ยาวเท่ากับส่วนโค้ง P_1P_2

ดังนั้น คอร์ด PP_3 ยาวเท่ากับคอร์ด P_1P_2

นั่นคือ

$$(PP_3)^2 = (P_1P_2)^2$$

$$(x_3-1)^2+(y_3-0)^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

$$x_3^2-2x_3+1+y_3^2 = x_2^2-2x_2x_1+x_1^2+y_2^2-2y_2y_1+y_1^2$$

$$-2x_3+2 = -2x_2x_1-2y_2y_1+2$$

เพราะจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย

$$x_3 = x_2x_1+y_2y_1 \qquad \text{------- (1)}$$

เนื่องจากจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ และ (x_3, y_3) เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว β, α และ $\alpha-\beta$ หน่วย ตามลำดับ

จะได้

$$x_1 = \cos\beta, \qquad y_1 = \sin\beta$$

$$x_2 = \cos\alpha, \qquad y_2 = \sin\alpha$$

$$x_3 = \cos(\alpha-\beta)$$

จากสมการ (1) จะได้ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

ที่กล่าวมาข้างต้นเป็นการหา $\cos(\alpha-\beta)$ หรือโคไซน์ของผลต่างระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนหรือมุมสองมุม ที่กล่าวถึงก่อนเพราะหาได้ง่ายและสามารถนำไปใช้ในการหา $\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta)$ และ $\sin(\alpha-\beta)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-(-\beta))\\ &= \cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\ \sin(-\beta)\\ &= \cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha(-\sin\beta)\\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

ในการหา $\sin(\alpha+\beta)$ อาจทำได้โดยพิสูจน์ว่า $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ และ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$ ก่อน ดังนี้

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha\\ &= \sin\alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น $$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

ให้ $\gamma=\frac{\pi}{2}-\beta$

จะได้ $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)$

เนื่องจาก $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) = \sin\gamma$

ดังนั้น $\sin\gamma = \cos\beta$

นั่นคือ $$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)\\ &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin(\alpha+(-\beta))\\ &= \sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha(-\sin\beta)\\ &= \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

เมื่อทราบค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha+\beta)$ แล้วจะสามารถหาค่าของ $\tan(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \quad \text{เมื่อ } \cos(\alpha+\beta) \neq 0$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} \quad \text{เมื่อ } \cos\alpha\cos\beta \neq 0$$

$$= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta \neq 1$$

ดังนั้น $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq 1$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq -1$

สรุปค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมได้ดังนี้

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta \neq -1$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \quad \text{เมื่อ } \tan\alpha\tan\beta \neq 1$$

การหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมโดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมทำได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 25

จงหาค่าของ $\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)$

วิธีทำ จาก $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

จะได้
$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right) &= \cos\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$
■

ตัวอย่างที่ 26

จงหาค่าของ $\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18}$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้
$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{18}+\cos\frac{\pi}{9}\sin\frac{\pi}{18} &= \sin\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi}{18}\right)\\ &= \sin\frac{3\pi}{18}\\ &= \sin\frac{\pi}{6}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$
■

ตัวอย่างที่ 27

จงหาค่าของ $\sin 15^\circ$ และ $\cos 75^\circ$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

จะได้
$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ - \cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

จาก $\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha$

จะได้
$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(90^\circ-15^\circ)\\ &= \sin 15^\circ\\ &= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 28

จงหาค่าของ $\tan\frac{7\pi}{12}$

วิธีทำ จาก $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

จะได้
$$\begin{aligned}\tan\frac{7\pi}{12} &= \tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}(1)}\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}+1\right)^2}{1-3}$$

$$= \frac{4+2\sqrt{3}}{-2}$$

$$= -2-\sqrt{3}$$ ■

ตัวอย่างที่ 29

จงแสดงว่า $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\cot\theta$

วิธีทำ จาก $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

จะได้ $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)}$

$$= \frac{\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{(\sin\theta)(0)+(\cos\theta)(1)}{(\cos\theta)(0)-(\sin\theta)(1)}$$

$$= \frac{\cos\theta}{-\sin\theta}$$

$$= -\cot\theta$$ ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น ไม่สามารถใช้ $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ได้ เนื่องจาก $\tan\beta$ ไม่นิยามที่ $\beta = \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 30

ให้ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ และ $\sin\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ เมื่อ $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ

1) $\cos\alpha$
2) $\cos\beta$
3) $\cos(\alpha+\beta)$
4) $\sin(\alpha+\beta)$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ และ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$

จะได้

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$

ดังนั้น $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ หรือ $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

เนื่องจาก $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ดังนั้น $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$

2) เนื่องจาก $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ และ $\sin\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

จะได้

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \cos^2\beta = 1$$

$$\cos^2\beta = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\cos^2\beta = \frac{1}{5}$$

ดังนั้น $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ หรือ $\cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

เนื่องจาก $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ดังนั้น $\cos\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

3) $$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ &= -\frac{3}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)-\frac{4}{5}\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{3\sqrt{5}+8\sqrt{5}}{25} \\ &= \frac{11\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{4}{5}\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \\ &= \frac{-4\sqrt{5}+6\sqrt{5}}{25} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$ ■

จากค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ และ $\cos(\alpha-\beta)$ เมื่อนำมาบวกหรือลบกันจะได้ความสัมพันธ์ที่สำคัญดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}2\sin\alpha\cos\beta &= \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) \\ 2\cos\alpha\cos\beta &= \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) \\ 2\sin\alpha\sin\beta &= \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 31

จงหาค่าของ $\cos 75^\circ \sin 525^\circ$

วิธีทำ จาก $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$

จะได้
$$
\begin{aligned}
\cos 75^\circ \sin 525^\circ &= \frac{\sin(75^\circ+525^\circ) - \sin(75^\circ-525^\circ)}{2} \\
&= \frac{\sin 600^\circ - \sin(-450^\circ)}{2} \\
&= \frac{\sin(540^\circ+60^\circ) + \sin(360^\circ+90^\circ)}{2} \\
&= \frac{-\sin 60^\circ + \sin 90^\circ}{2} \\
&= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}
$$

■

นอกจากนี้ยังสามารถหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}
\end{aligned}
$$

จะแสดงว่า $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก $\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x\cos y$ -------(1)

ให้ $x+y=\alpha$ และ $x-y=\beta$

นั่นคือ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ และ $y=\frac{\alpha-\beta}{2}$

จาก (1) จะได้ $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

สำหรับความสัมพันธ์อื่น ๆ สามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกัน

ตัวอย่างที่ 32

จงหาค่าของ $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\sin 75^\circ+\sin 15^\circ &= 2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\\ &= 2\sin 45^\circ\cos 30^\circ\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 33

จงหาค่าของ $\cos\frac{17\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\cos\frac{17\pi}{12}+\cos\frac{11\pi}{12} &= 2\cos\frac{17\pi+11\pi}{24}\cos\frac{17\pi-11\pi}{24}\\ &= 2\cos\frac{7\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{4}\\ &= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= -\frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$
■

เมื่อทราบค่าของ $\sin\alpha, \cos\alpha$ หรือ $\tan\alpha$ จะสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนซึ่งเป็นสองเท่าของ α ได้ โดยอาศัยค่าของ $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta)$ และ $\tan(\alpha+\beta)$ ตามลำดับ เช่น หาค่าของ $\sin 2\alpha$ ได้ดังนี้

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha+\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

นอกจากนี้ยังสามารถหาค่าของ $\cos 2\alpha$ จาก $\cos(\alpha+\beta)$ ได้ดังนี้
$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha+\alpha)\\ &= \cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ -------(1)

แทน $\cos^2\alpha$ ด้วย $1-\sin^2\alpha$ ใน (1) จะได้
$$\cos 2\alpha = \left(1-\sin^2\alpha\right)-\sin^2\alpha$$

ดังนั้น $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

และแทน $\sin^2\alpha$ ด้วย $1-\cos^2\alpha$ ใน (1) จะได้

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \left(1-\cos^2\alpha\right)$$

ดังนั้น $$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

และสามารถหาค่าของ $\tan 2\alpha$ โดยใช้ $\tan(\alpha+\beta)$ ดังนี้

$$\tan 2\alpha = \tan(\alpha+\alpha)$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1-\tan\alpha\tan\alpha}$$

ดังนั้น $$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \text{ เมื่อ } \tan^2\alpha \neq 1$$

สรุปความสัมพันธ์ที่กล่าวมาได้ดังนี้

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \text{ เมื่อ } \tan^2\alpha \neq 1$$

ตัวอย่างที่ 34

กำหนดให้ $\cos\theta = \frac{3}{5}$ และ $\sin\theta < 0$ จงหาค่าของ

1) $\sin 2\theta$ 2) $\cos 2\theta$ 3) $\tan 2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

จะได้ $$\sin^2\theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\theta = 1-\left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

ดังนั้น $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ เพราะ $\sin\theta < 0$

1) จาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

จะได้ $\sin 2\theta = 2\left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$

$= -\frac{24}{25}$

2) จาก $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

จะได้ $\cos 2\theta = \frac{9}{25} - \frac{16}{25}$

$= -\frac{7}{25}$

3) จาก $\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$

จะได้ $\tan 2\theta = \frac{-\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}}$

$= \frac{24}{7}$ ■

ตัวอย่างที่ 35

จงแสดงว่า $\cot x \sin 2x = 1 + \cos 2x$ เมื่อ $\sin x \neq 0$

วิธีทำ $\cot x \sin 2x = \frac{\cos x}{\sin x}(\sin 2x)$ เมื่อ $\sin x \neq 0$

$= \frac{\cos x}{\sin x}(2\sin x\cos x)$

$= 2\cos^2 x$

$= 1 + \cos 2x$ ■

ตัวอย่างที่ 36

จงเขียน $\sin 3\alpha$ ในรูปของ $\sin\alpha$

วิธีทำ จาก $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

จะได้
$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha+\alpha)\\ &= \sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha\\ &= (2\sin\alpha\cos\alpha)\cos\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha\\ &= 2\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\sin\alpha-\sin^3\alpha\\ &= 2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha)\sin\alpha-\sin^3\alpha\\ &= 2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-\sin^3\alpha-\sin^3\alpha\\ &= 3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\end{aligned}$$
■

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุมหาค่าต่อไปนี้

1) $\cos(60^\circ+45^\circ)$
2) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$
3) $\cos 225^\circ$
4) $\sin 135^\circ$
5) $\tan 75^\circ$
6) $\tan 105^\circ$
7) $\cos\frac{7\pi}{12}$
8) $\operatorname{cosec}\frac{7\pi}{12}$
9) $\sin\frac{17\pi}{12}$
10) $\tan\frac{19\pi}{12}$
11) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$
12) $\cot\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$

2. จงหาค่าของ

1) $\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right)$

2) $\sin\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{3}$

3) $\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 20^\circ\sin 10^\circ$

4) $\cos 70^\circ\cos 20^\circ-\sin 70^\circ\sin 20^\circ$

5) $\frac{\tan 20^\circ+\tan 25^\circ}{1-\tan 20^\circ\tan 25^\circ}$

6) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}-\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

7) $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$

8) $\frac{\tan 75^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 75^\circ\tan 45^\circ}$

9) $\cos 15^\circ\cos 30^\circ-\sin 15^\circ\sin 30^\circ$

10) $\sin 20^\circ\cos 80^\circ-\cos 20^\circ\sin 80^\circ$

3. จงหาค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\tan(\alpha-\beta)$ เมื่อกำหนดให้

1) $\sin\alpha=\frac{3}{5},\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ และ $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{\pi}{2}<\beta<0$

2) $\tan\alpha=-\frac{4}{3},\ \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ และ $\cos\beta=\frac{1}{2},\ 0<\beta<\frac{\pi}{2}$

3) $\operatorname{cosec}\alpha=-2,\ -\frac{\pi}{2}<\alpha<0$ และ $\tan\beta=\frac{15}{8},\ \pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$

4. ถ้า $\cos x=\frac{3}{7}$ แล้ว จงหา $\cos 2x$

5. ถ้า $\cos 64^\circ=0.44$ แล้ว จงหา $\cos 32^\circ$

6. ถ้า $\cos x=-\frac{3}{5}$ และ $\tan y=\frac{5}{12}$ เมื่อ $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ และ $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$ แล้ว จงหา

1) $\sin x$

2) $\sec y$

3) $\cos(x+y)$

4) $\operatorname{cosec}(x+y)$

7. จงแสดงว่า

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

2) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)=-\sin\theta$

4) $\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

5) $\sin(90° - A) = \cos A$

6) $\cot(90° - B) = \tan B$

7) $\operatorname{cosec}(90° - B) = \sec B$

8) $\cos(270° - A) = -\sin A$

9) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$ เมื่อ $\tan\alpha\tan\beta \neq -1$

10) $\dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = 1 - \tan\alpha\tan\beta$ เมื่อ $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$

11) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

12) $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

13) $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha + \beta}{2}\cos\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

14) $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha + \beta}{2}\sin\dfrac{\alpha - \beta}{2}$

15) $\cos(x - 30°) - \cos(x + 30°) = \sin x$

16) $\sin(x - 30°) + \sin(x + 30°) = \sqrt{3}\sin x$

17) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \cos\alpha + \sin\alpha$ เมื่อ $\cos\alpha \neq \sin\alpha$

18) $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

19) $\dfrac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha} = -2\sin 2\alpha$ เมื่อ $\sin\alpha \neq 0$

20) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 + \cos\alpha}{2}$

21) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{2}$

22) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$ เมื่อ $\cos\alpha \neq -1$

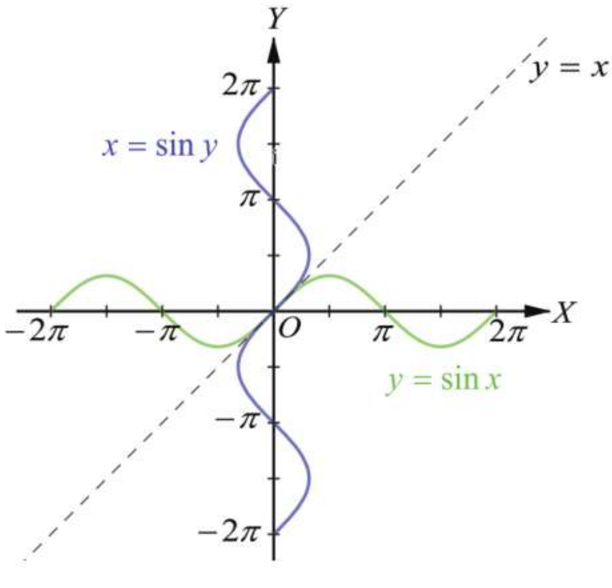
1.6 ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การหาตัวผกผันของฟังก์ชันทำได้โดยการสลับที่ระหว่างสมาชิกตัวหน้าและสมาชิกตัวหลังของแต่ละคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของฟังก์ชัน โดยฟังก์ชัน 1–1 เท่านั้นที่มีตัวผกผันเป็นฟังก์ชัน

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ดังนั้น ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันไซน์มีคู่อันดับ $(0, 0), (\pi, 0)$ และ $(2\pi, 0)$ เป็นสมาชิก ดังนั้น คู่อันดับ $(0, 0), (0, \pi)$ และ $(0, 2\pi)$ จึงเป็นสมาชิกของตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ ซึ่งจะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม จะพบว่าตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์

พิจารณากราฟของ $y = \sin x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-1 \le y \le 1$ และกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid x = \sin y\}$ ซึ่งเป็นตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์ต่อไปนี้



รูปที่ 27

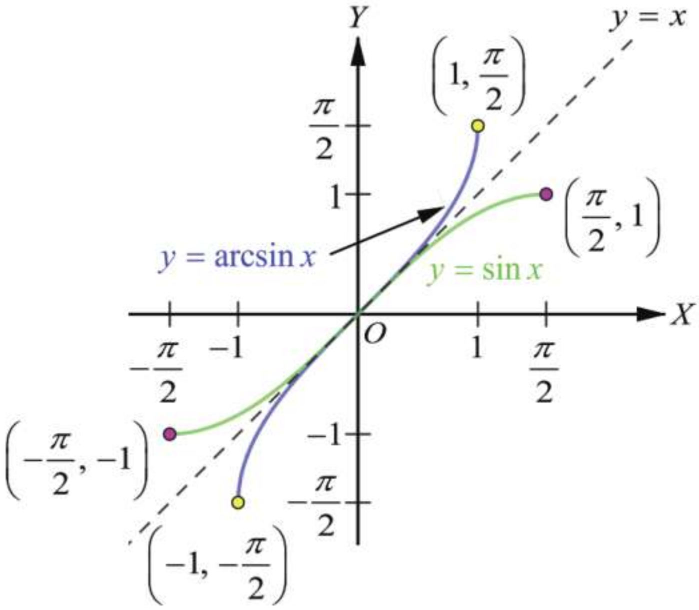
จะเห็นว่า $\{(x, y) \mid x = \sin y\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันไซน์เป็น $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ จะได้ว่า $\left\{(x, y) \;\middle|\; y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น $\left\{(x, y) \;\middle|\; x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$ และจะเรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arcsine

บทนิยาม 2

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x, y) \in \text{arcsine}$ จะได้ $y = \text{arcsine}\, x$ หรือ $y = \arcsin x$ ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \sin y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \;\middle|\; y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \;\middle|\; y = \arcsin x, -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$



$y = \arcsin x$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$ และ $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

รูปที่ 28

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-1, 1\right]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

การหาค่าของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติสามารถทำได้โดยอาศัยฟังก์ชันตรีโกณมิตินั้น ๆ เช่น การหาค่าของ $\arcsin x$ โดยที่ $-1 \le x \le 1$ ก็คือการหา θ ซึ่งอยู่ในเรนจ์ของฟังก์ชัน arcsine ที่ทำให้ $\sin\theta = x$ นั่นเอง

ตัวอย่างเช่น การหาค่าของ $\arcsin\frac{1}{4}$ ก็คือการหา θ ซึ่ง $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{4}$

ตัวอย่างที่ 37

จงหาค่าของ $\arcsin 1$

วิธีทำ ให้ $\arcsin 1 = \theta$ จะได้ $\sin\theta = 1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = 1$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{2} = 1$

ดังนั้น $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 38

จงหาค่าของ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \theta$ จะได้ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ ■

ตัวอย่างที่ 39

จงหาค่าของ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$ จะได้ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

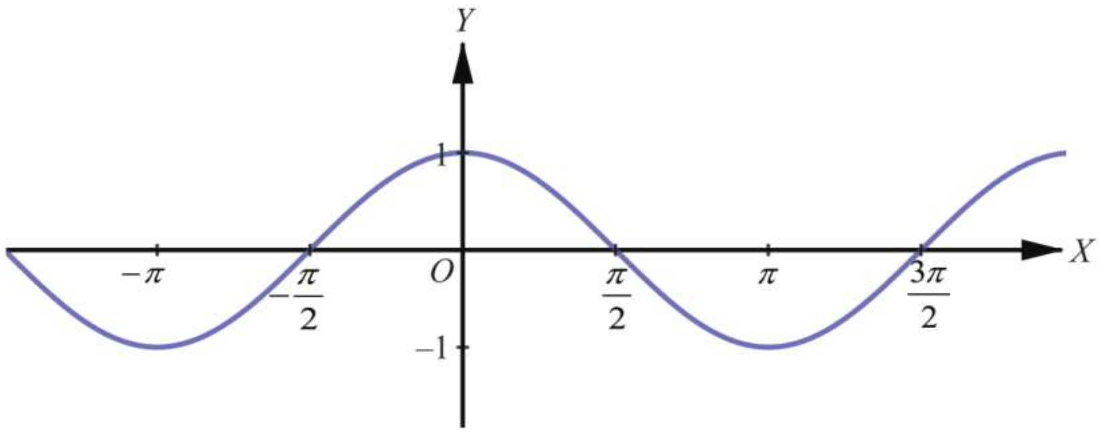
หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ มี $-\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$ ■

ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \cos x$



รูปที่ 29

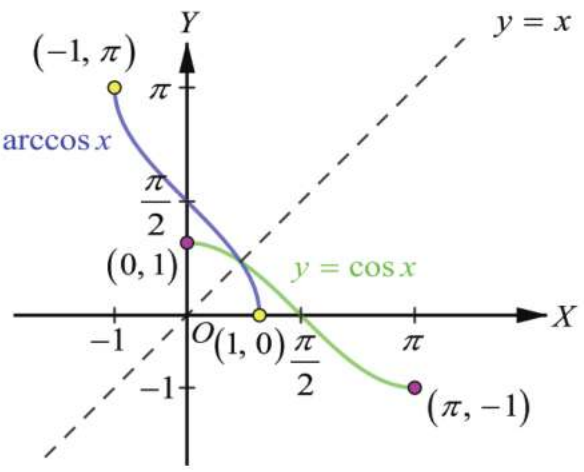
เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \cos x$ เป็น $[0, \pi]$ จะได้ว่า $\{(x, y) \mid y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น $\{(x, y) \mid x = \cos y,\ 0 \le y \le \pi\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arccosine

บทนิยาม 3

ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \le y \le \pi$

เมื่อ $(x, y) \in \text{arccosine}$ จะได้ $y = \text{arccosine}\, x$ หรือ $y = \arccos x$ ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \cos y$ เมื่อ $0 \le y \le \pi$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \cos x, 0 \le x \le \pi\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\{(x, y) \mid y = \arccos x, 0 \le y \le \pi\}$



$y = \arccos x$ เมื่อ $-1 \le x \le 1$ และ $0 \le y \le \pi$

รูปที่ 30

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arccosine คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arccosine คือ $[0, \pi]$

ตัวอย่างที่ 40

จงหาค่าของ $\arccos 0$

วิธีทำ ให้ $\arccos 0 = \theta$ จะได้ $\cos\theta = 0$

หาค่า θ ที่ $0 \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = 0$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี $\frac{\pi}{2}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

ดังนั้น $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 41

จงหาค่าของ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\theta$ จะได้ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=-\frac{1}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0,\pi]$ มี $\frac{2\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$ ■

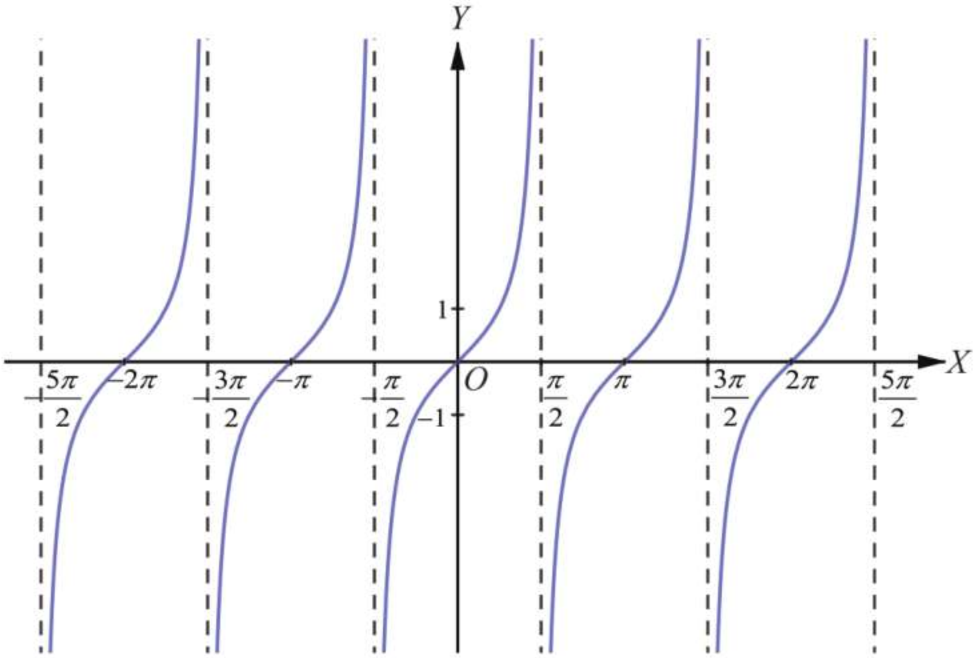
เสริมสมอง : great-circle distance

great-circle distance คือ ระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างจุดสองจุดบนผิวทรงกลม ซึ่งสามารถนำวิธีการหา great-circle distance ไปใช้ในการหาระยะทางที่สั้นที่สุดระหว่างตำแหน่งสองตำแหน่งบนพื้นโลก เนื่องจากโลกมีสัณฐานเกือบเป็นทรงกลม great-circle distance หาได้โดยใช้ความรู้เรื่องตรีโกณมิติ ถ้าให้ r แทนความยาวรัศมีของโลก (มีหน่วยเป็นไมล์) ϕ_A และ λ_A แทนละติจูดและลองจิจูดของเมือง A ตามลำดับ และ ϕ_B และ λ_B แทนละติจูดและลองจิจูดของเมือง B ตามลำดับ (มีหน่วยเป็นองศา) แล้วระยะทางระหว่างเมือง A และเมือง B เท่ากับ $\frac{\pi r}{180}\arccos\left(\sin\phi_A\sin\phi_B+\cos\phi_A\cos\phi_B\cos\left(\lambda_A-\lambda_B\right)\right)$ ไมล์



ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $y = \tan x$



รูปที่ 31

เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \tan x$ เป็น $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ จะได้ว่า

ฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \mid y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันเป็น

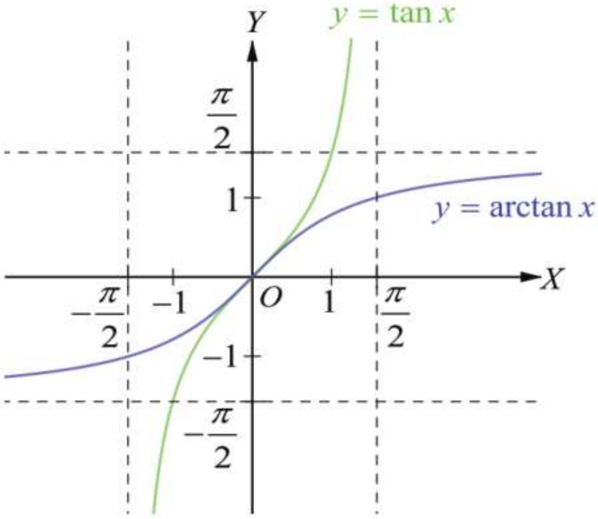
$\left\{(x, y) \mid x = \tan y,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arctangent

บทนิยาม 4

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x, y) \in \text{arctangent}$ จะได้ $y = \text{arctangent}\, x$ หรือ $y = \arctan x$ ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \tan y$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \mid y = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right\}$ และกราฟของฟังก์ชัน $\left\{(x, y) \mid y = \arctan x,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right\}$



$y = \arctan x$ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

รูปที่ 32

จะเห็นว่า โดเมนของฟังก์ชัน arctangent คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน arctangent คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 42

จงหาค่าของ $\arctan 1$

วิธีทำ ให้ $\arctan 1 = \theta$ จะได้ $\tan\theta = 1$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta = 1$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ มี $\frac{\pi}{4}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

ดังนั้น $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ■

ตัวอย่างที่ 43

จงหาค่าของ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=\theta$ จะได้ $\tan\theta=-\sqrt{3}$

หาค่า θ ที่ $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=-\sqrt{3}$

เนื่องจากในช่วง $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ มี $-\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียวที่ $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$

ดังนั้น $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}$ ■

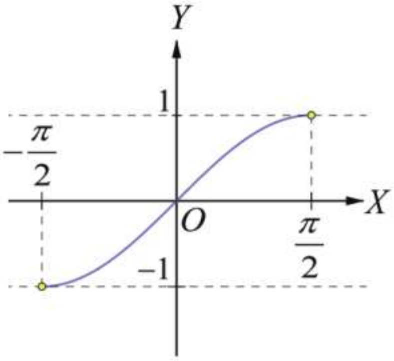
สรุปได้ว่า ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดโดเมนเพื่อให้มีฟังก์ชันผกผัน มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
$y=\cos x$	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
$y=\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$

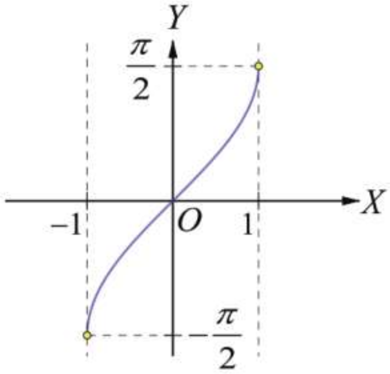
และฟังก์ชัน arcsine, arccosine และ arctangent มีโดเมนและเรนจ์ ดังนี้

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y=\arcsin x$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arccos x$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$y=\arctan x$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

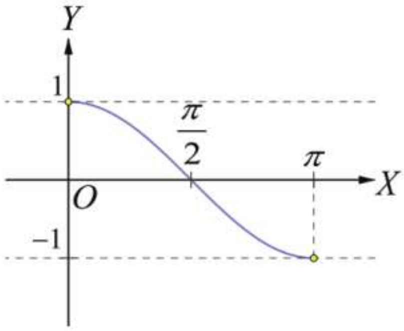
กราฟของฟังก์ชัน sine, cosine, tangent, arcsine, arccosine และ arctangent เป็นดังนี้



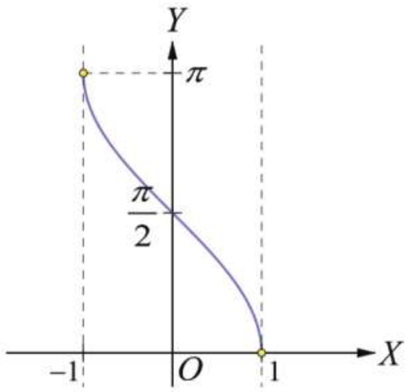
$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$



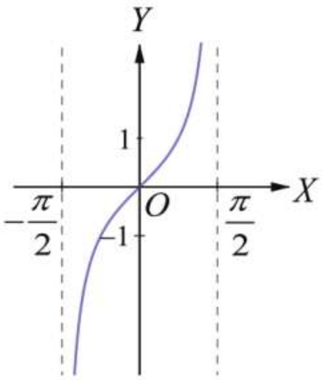
$y = \arcsin x, -1 \le x \le 1$



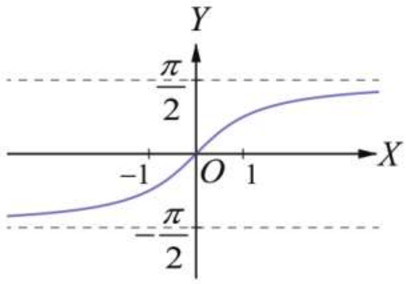
$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$



$y = \arccos x,\ -1 \le x \le 1$



$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = \arctan x,\ x \in \mathbb{R}$

รูปที่ 33

หมายเหตุ หนังสือบางเล่มเขียนแทนฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ ฟังก์ชันโคไซน์ และฟังก์ชันแทนเจนต์ ด้วย $y = \sin^{-1} x$, $y = \cos^{-1} x$ และ $y = \tan^{-1} x$ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 44

จงหาค่าของ $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

วิธีทำ ให้ $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\theta$ จะได้ $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

หาค่า θ ที่ $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

เนื่องจากในช่วง $[0, \pi]$ มี $\frac{\pi}{6}$ เพียงค่าเดียวที่ $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$

และ $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 45

จงหาค่าของ $\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right)$

วิธีทำ ให้ $\theta=\arccos\frac{1}{3}$

จะได้ $\cos\theta=\frac{1}{3}$ โดยที่ $0\le\theta\le\pi$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\cos\left(2\arccos\frac{1}{3}\right) &= \cos(2\theta)\\ &= 2\cos^2\theta-1\\ &= 2\left(\frac{1}{3}\right)^2-1\\ &= -\frac{7}{9}\end{aligned}$$
■

ตัวอย่างที่ 46

จงหาค่าของ $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$

วิธีทำ ให้ $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = \theta$

จะได้ $\sin\theta = -\frac{1}{3}$ โดยที่ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $-\frac{\pi}{2} \le \theta < 0$

จาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

จะได้
$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1-\sin^2\theta \\ &= 1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= \frac{8}{9}\end{aligned}$$

ดังนั้น $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ หรือ $\cos\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} \le \theta < 0$ จะได้ $\cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ■

ตัวอย่างที่ 47

จงแสดงว่า $\sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

วิธีทำ ให้ $\arctan x = \theta$

จะได้ $\tan\theta = x$ โดยที่ $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

จาก $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$

จะได้ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$ หรือ $\sec\theta = -\sqrt{1+\tan^2\theta}$

เนื่องจาก $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ จะได้ $\sec\theta > 0$ นั่นคือ $\sec\theta = \sqrt{1+\tan^2\theta}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\sin(\arctan x) &= \sin\theta \\ &= \cos\theta\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &= \frac{\tan\theta}{\sec\theta} \\ &= \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

■

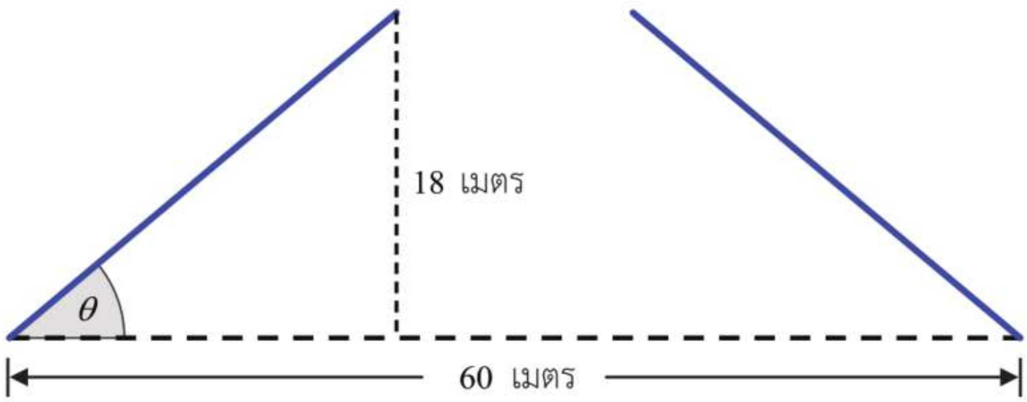
ตัวอย่างที่ 48



สะพานข้ามแม่น้ำแห่งหนึ่งมีส่วนตรงกลางที่สามารถเปิดให้เรือผ่านได้ยาว 60 เมตร โดยแบ่งเป็นสองส่วนเท่ากัน และเปิดขึ้นจากตรงกลาง ถ้าขณะที่เปิดสะพาน ส่วนที่สูงสุดอยู่สูงจากแนวเดิมของสะพาน 18 เมตร จงหาว่าสะพานเปิดขึ้นไปเป็นมุมเท่าใด

วิธีทำ ให้ θ เป็นมุมที่สะพานเปิดขึ้นไป

จากโจทย์ เขียนรูปได้ดังนี้



จะได้ $\sin\theta = \dfrac{18}{30} = 0.6$

นั่นคือ $\theta = \arcsin 0.6$ ซึ่งเมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\theta \approx 0.6435$ และเมื่อเปลี่ยนเป็นฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่มีหน่วยเป็นองศา จะได้ $\theta \approx 36.87°$

ดังนั้น สะพานเปิดขึ้นไปเป็นมุมประมาณ $36.87°$ ■

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหาค่าของ

1) $\arcsin 0$
2) $\arccos 1$
3) $\arcsin(-1)$
4) $\arccos(-1)$
5) $\arctan 0$
6) $\arctan(-1)$
7) $\arcsin\frac{1}{2}$
8) $\arctan\frac{\sqrt{3}}{3}$
9) $\arctan\sqrt{3}$
10) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
11) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
12) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. จงหาค่าของ

1) $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
2) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
3) $\tan\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$
4) $\tan\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$
5) $\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
6) $\cos(\arctan 2)$
7) $\sec\left(\arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$
8) $\sin(\arctan(-3))$
9) $\tan\left(\arcsin\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)\right)$
10) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}+\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$
11) $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{4}\right)$
12) $\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$
13) $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$
14) $\arctan\left(\tan\frac{5\pi}{3}\right)$

3. จงแสดงว่า

   1) $\arcsin\frac{1}{2}+\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=-\arcsin(-1)$

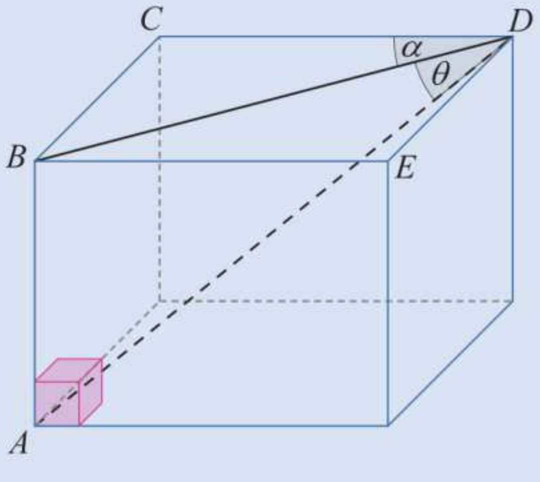
   2) $\cos(2\arcsin x)=1-2x^2$ เมื่อ $x\in[-1,1]$

   3) $\sec(\arctan x)=\sqrt{1+x^2}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

   4) $\arctan x+\arctan(-x)=0$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

   5) $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$ เมื่อ $x\in[-1,1]$

4. ห้องห้องหนึ่งกว้าง 4 เมตร ยาว 4 เมตร และสูง 3 เมตร มีตู้นิรภัยตู้หนึ่งตั้งอยู่มุมห้องที่จุด A ดังรูป ถ้าต้องการติดตั้งกล้องวงจรปิดบริเวณเพดานของห้องที่จุด D เพื่อให้สามารถมองเห็นตู้นิรภัยได้แล้ว จงหาขนาดของมุม CDB และมุม BDA



1.7 เอกลักษณ์และสมการตรีโกณมิติ

1.7.1 เอกลักษณ์

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \quad \text{เมื่อ } \tan\theta \neq 0$$

$$\sin\theta = \cos\theta$$

จะเห็นว่า สมการทั้งสองเป็นสมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติปรากฏอยู่ เรียกสมการเช่นนี้ว่า **สมการตรีโกณมิติ**

สมการ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ ที่ทำให้หาค่าของฟังก์ชันที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้นได้ คือ ค่าของ $\cot\theta, \tan\theta$ และ $\frac{1}{\tan\theta}$ เรียกสมการที่มีสมบัติเช่นสมการ $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ว่า **เอกลักษณ์**

ส่วนสมการ $\sin\theta = \cos\theta$ จะเป็นจริงสำหรับบางค่าของ θ ที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองเท่านั้น

ในเรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ผ่านมาได้มีการพิสูจน์เอกลักษณ์มาบ้างแล้ว เช่น เอกลักษณ์ต่อไปนี้

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์เป็นการแสดงให้เห็นว่าจำนวนทั้งสองข้างของเครื่องหมายเท่ากับของสมการเท่ากันจริง โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ การพิสูจน์เอกลักษณ์จึงช่วยให้เห็นความสัมพันธ์ต่าง ๆ ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติ และเอกลักษณ์ที่พิสูจน์แล้วสามารถนำไปอ้างอิงในการพิสูจน์เอกลักษณ์อื่น ๆ ได้

ตัวอย่างที่ 49

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} = 3\cos\theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{2\cos^2\theta - \sin^2\theta + 1}{\cos\theta} &= \frac{2\cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right) + 1}{\cos\theta} \\ &= \frac{3\cos^2\theta}{\cos\theta} \\ &= 3\cos\theta\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 50

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = \dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} &= \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\left(\frac{1+\sin\theta}{1+\sin\theta}\right) \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta)}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 51

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \tan\dfrac{x}{2}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{1+\cos x} &= \frac{\sin 2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)} \\
&= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1+2\cos^2\frac{x}{2}-1} \\
&= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} \\
&= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \\
&= \tan\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 52

จงพิสูจน์ว่า $\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{\sin 3x+\sin 5x} = \tan x$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\sin 3x+\sin 5x} &= \frac{-2\sin\frac{3x+5x}{2}\sin\frac{3x-5x}{2}}{2\sin\frac{3x+5x}{2}\cos\frac{3x-5x}{2}} \\
&= \frac{-2\sin 4x\,\sin(-x)}{2\sin 4x\,\cos(-x)} \\
&= \frac{-(-\sin x)}{\cos x} \\
&= \tan x
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างต่อไปนี้เป็นการพิสูจน์เอกลักษณ์ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

ตัวอย่างที่ 53

กำหนด $A+B+C=\pi$ จงพิสูจน์ว่า $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

วิธีทำ จาก $A+B+C=\pi$ จะได้ $A+B=\pi-C$

จะได้ $\tan(A+B) = \tan(\pi-C) = -\tan C$

$$\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} = -\tan C$$

$$\tan A+\tan B = -\tan C(1-\tan A\tan B)$$

$$= -\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

ดังนั้น $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ ■

แบบฝึกหัด 1.7.1

1. จงพิสูจน์ว่า

1) $\operatorname{cosec}\theta\cos\theta=\cot\theta$

2) $\dfrac{\cos x}{\sec x}+\dfrac{\sin x}{\operatorname{cosec} x}=1$

3) $\cos\theta(\tan\theta+\cot\theta)=\operatorname{cosec}\theta$

4) $(\sec\theta-1)(\sec\theta+1)=\tan^2\theta$

5) $\sin^2\theta(1+\cot^2\theta)=1$

6) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$

7) $\sin^2\alpha\cot^2\alpha+\tan^2\alpha\cos^2\alpha=1$

8) $2\sin^2\alpha-1=1-2\cos^2\alpha$

9) $3\sin^2\theta+4\cos^2\theta=3+\cos^2\theta$

10) $\dfrac{\sec\theta}{\operatorname{cosec}\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=2\tan\theta$

11) $\sec^4\theta-\sec^2\theta=\tan^4\theta+\tan^2\theta$

12) $1-\dfrac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}=\sin\theta$

13) $\dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta}=\dfrac{\cot\theta+1}{\cot\theta-1}$

14) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\dfrac{\operatorname{cosec}\theta+1}{\operatorname{cosec}\theta-1}$

15) $\operatorname{cosec} x - \sin x = \cos x \cot x$

16) $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \tan^2\theta \sin^2\theta$

17) $\dfrac{\sin\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \dfrac{1}{1-\cot\theta}$

18) $\sec\theta - \tan\theta = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

2. จงพิสูจน์ว่า

1) $\cos(45^\circ - \theta) - \sin(45^\circ + \theta) = 0$

2) $\tan(45^\circ - \alpha) = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

3) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2\beta$

4) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$

5) $\left(\sin\dfrac{\theta}{2} - \cos\dfrac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - \sin\theta$

6) $\tan 3\theta = \dfrac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$

7) $\cos^2 A + \cos^2(60^\circ + A) + \cos^2(60^\circ - A) = \dfrac{3}{2}$

8) $\dfrac{\sin 8\theta + \sin 2\theta}{\cos 8\theta + \cos 2\theta} = \tan 5\theta$

9) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta = 4\cos\theta \sin 4\theta \cos 2\theta$

3. ถ้า $A + B + C = \dfrac{\pi}{4}$ จงพิสูจน์ว่า

$\tan A + \tan B + \tan C = 1 - \tan A \tan B - \tan A \tan C - \tan B \tan C + \tan A \tan B \tan C$

1.7.2 สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติทำได้ในทำนองเดียวกันกับการแก้สมการทั่วไป เช่น สมการเอกซ์โพเนนเชียลหรือสมการลอการิทึม โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ เพื่อหาคำตอบของสมการ

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1–1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใด ๆ อาจจะซ้ำกันได้ ดังนั้น ในการหาคำตอบของสมการ ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่งแล้ว คำตอบควรจะอยู่ในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 54

จงหาเซตคำตอบของสมการ $\cos x = \frac{1}{2},\ 0 < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ เนื่องจากค่าของ x ในช่วง $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ที่ทำให้ $\cos x = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{3}$ เพียงค่าเดียว

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 55

จงแก้สมการ $\sin\theta = \frac{1}{2}$

วิธีทำ ค่าของ θ ในช่วง $[0, 2\pi]$ ที่ทำให้ $\sin\theta = \frac{1}{2}$ คือ $\frac{\pi}{6}$ และ $\frac{5\pi}{6}$

เนื่องจาก $\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

และ $\sin\left(2n\pi + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ θ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ และ $2n\pi + \frac{5\pi}{6}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ■

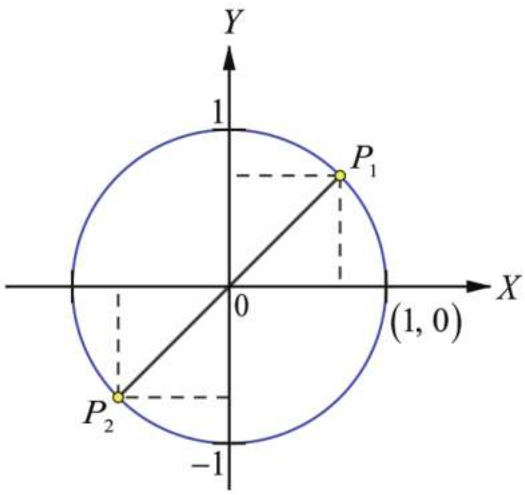
ตัวอย่างที่ 56

จงแก้สมการ $\tan x = 1$

วิธีทำ จาก $\tan x = 1$

จะได้ $\dfrac{\sin x}{\cos x} = 1$

$\sin x = \cos x$



จากรูป ถ้า $\sin x = \cos x$ แสดงว่าจุด P_1 และ P_2 มีพิกัดแรกและพิกัดที่สองเท่ากัน

นั่นคือ $x = \dfrac{\pi}{4}$ และ $x = \dfrac{5\pi}{4}$

ดังนั้น ค่าทั่วไปของ x ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $2n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ และ $2n\pi + \dfrac{5\pi}{4}$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม ■

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น เนื่องจาก $2n\pi + \dfrac{5\pi}{4} = (2n+1)\pi + \dfrac{\pi}{4}$ เมื่อ $n \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\left\{ x \,\middle|\, x = n\pi + \dfrac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z} \right\}$

ตัวอย่างที่ 57

จงแก้สมการ $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ เมื่อ $0° \le \theta \le 360°$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 &= 0 \\ 2\left(1-\cos^2\theta\right) + 3\cos\theta - 3 &= 0 \\ 2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 &= 0 \\ 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 &= 0 \\ (2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

นั่นคือ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta = 1$

ค่าของ θ ในช่วง $[0°, 360°]$ ที่ทำให้ $\cos\theta = \frac{1}{2}$ คือ $60°$ และ $300°$

และค่าของ θ ในช่วง $[0°, 360°]$ ที่ทำให้ $\cos\theta = 1$ คือ $0°$ และ $360°$

ดังนั้น ค่าของ θ ในช่วง $[0°, 360°]$ ที่ทำให้สมการเป็นจริง คือ $0°, 60°, 300°$ และ $360°$ ■

ตัวอย่างที่ 58

จงแก้สมการ $\sin\theta + \cos\theta = 1$

วิธีทำ จาก $\sin\theta + \cos\theta = 1$

จะได้

$$\begin{aligned} (\sin\theta + \cos\theta)^2 &= 1 \\ \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta &= 1 \\ 2\sin\theta\cos\theta + 1 &= 1 \\ 2\sin\theta\cos\theta &= 0 \\ \sin 2\theta &= 0 \end{aligned}$$

$2\theta = 0$ หรือ $2\theta = \pi$ หรือ $2\theta = 2\pi$ หรือ $2\theta = 3\pi$

$\theta = 0$ หรือ $\theta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \pi$ หรือ $\theta = \frac{3\pi}{2}$ เมื่อ $\theta \in [0, 2\pi)$

ตรวจคำตอบ แทน θ ในสมการ $\sin\theta+\cos\theta=1$ ด้วย 0 จะได้

$$\begin{aligned}\sin 0+\cos 0 &= 1\\ 1 &= 1 \text{ เป็นจริง}\end{aligned}$$

แทน θ ในสมการ $\sin\theta+\cos\theta=1$ ด้วย $\frac{\pi}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned}\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2} &= 1\\ 1 &= 1 \text{ เป็นจริง}\end{aligned}$$

แทน θ ในสมการ $\sin\theta+\cos\theta=1$ ด้วย π จะได้

$$\begin{aligned}\sin\pi+\cos\pi &= 1\\ -1 &= 1 \text{ เป็นเท็จ}\end{aligned}$$

แทน θ ในสมการ $\sin\theta+\cos\theta=1$ ด้วย $\frac{3\pi}{2}$ จะได้

$$\begin{aligned}\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2} &= 1\\ -1 &= 1 \text{ เป็นเท็จ}\end{aligned}$$

จะได้ คำตอบของสมการ $\sin\theta+\cos\theta=1$ ในช่วง $[0, 2\pi)$ คือ 0 และ $\frac{\pi}{2}$

ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการ คือ $2n\pi$ และ $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัด 1.7.2

1. จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $0\le\theta<2\pi$
   1) $2\cos^2\theta+\cos\theta=0$
   2) $2\sin^2\theta-\sin\theta-1=0$
   3) $\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}$
   4) $\tan\theta\sin\theta+\tan\theta=0$
   5) $4\sin^3\theta-\sin\theta=0$
   6) $\sin^2\theta-\cos\theta+5=0$
   7) $2\sin^2\theta-3\cos\theta-3=0$
   8) $\cot\theta+2\sin\theta=\operatorname{cosec}\theta$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้ เมื่อ $0° \le \theta < 360°$

   1) $2\sin\theta - 1 = 0$
   2) $3\tan^2\theta - 1 = 0$
   3) $4\tan^2\theta - 3\sec^2\theta = 0$
   4) $4\cos^4\theta = (\sin 2\theta)^2$
   5) $\sin 5\theta + \sin 3\theta = 0$

3. จงแก้สมการต่อไปนี้

   1) $4\sin^2\theta = 1$
   2) $\sec^2\theta - 2\tan\theta = 0$

1.8 กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริงหรือมุม สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติอาจนำมาใช้ในการหาความยาวของด้านและขนาดของมุมของรูปหลายเหลี่ยมได้ โดยเฉพาะรูปสามเหลี่ยม ซึ่งจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยมและฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้

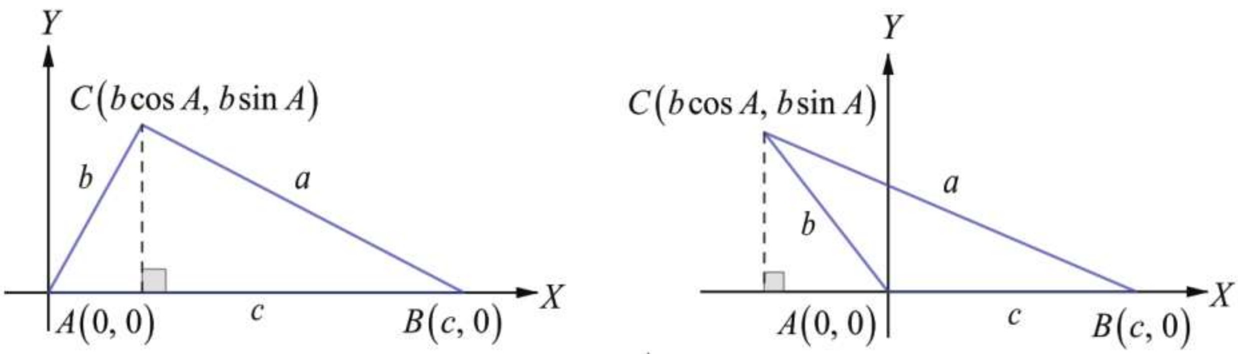
กฎของโคไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ

จะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน



รูปที่ 34

จากรูป จุด A มีพิกัด $(0, 0)$
และ จุด B มีพิกัด $(c, 0)$
จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A,\ b\sin A)$

และ
$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{(b\cos A - c)^2 + (b\sin A - 0)^2} \\
a^2 &= (b\cos A - c)^2 + b^2\sin^2 A \\
&= b^2\cos^2 A - 2bc\cos A + c^2 + b^2\sin^2 A \\
&= b^2\left(\cos^2 A + \sin^2 A\right) + c^2 - 2bc\cos A \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cos A
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
สำหรับ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ และ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$
สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

กฎของโคไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม เมื่อกำหนดความยาวของด้านบางด้านและขนาดของมุมบางมุม ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 59

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 12, b = 7, C = 40^\circ$ และ $\cos 40^\circ \approx 0.766$ จงหาค่าของ c

วิธีทำ จากกฎของโคไซน์ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

จะได้
$$
\begin{aligned}
c^2 &= 12^2 + 7^2 - 2(12)(7)\cos 40^\circ \\
&\approx 144 + 49 - 2(12)(7)(0.766) \\
&\approx 64.312
\end{aligned}
$$

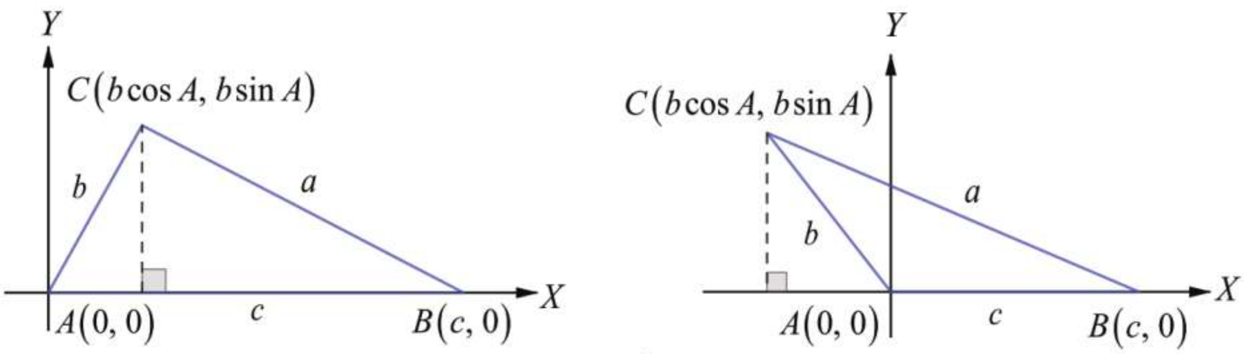
ดังนั้น $c \approx 8.02$ ■

กฎของไซน์

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จะได้

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

พิสูจน์ ให้มุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่กำหนดให้อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน



รูปที่ 35

จากรูป จุด A มีพิกัด $(0, 0)$
และ จุด B มีพิกัด $(c, 0)$
จะได้ จุด C มีพิกัด $(b\cos A, b\sin A)$

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times \text{ความสูง} \times \text{ความยาวของฐาน} \\ &= \frac{1}{2}(b\sin A)(c) \\ &= \frac{1}{2}bc\sin A \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าให้มุม B และมุม C อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน แล้วจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}ca\sin B$ และ $\frac{1}{2}ab\sin C$ ตามลำดับ

นั่นคือ $\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก จะได้

$$\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)\left(\frac{2}{abc}\right) = \left(\frac{1}{2}ca\sin B\right)\left(\frac{2}{abc}\right) = \left(\frac{1}{2}ab\sin C\right)\left(\frac{2}{abc}\right)$$

ดังนั้น

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

กฎของไซน์นี้ใช้หาความยาวของด้านหรือขนาดของมุมของรูปสามเหลี่ยม ดังในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 60

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $a = 10, B = 42^\circ, C = 51^\circ, \sin 42^\circ \approx 0.6691$ และ $\sin 87^\circ \approx 0.9986$ จงหาค่าของ b

วิธีทำ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} A &= 180^\circ - (B + C) \\ &= 180^\circ - (42^\circ + 51^\circ) \\ &= 87^\circ \end{aligned}$$

จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 87^\circ}{10} = \frac{\sin 42^\circ}{b}$

จะได้
$$\begin{aligned} b &= \frac{10\sin 42^\circ}{\sin 87^\circ} \\ &\approx \frac{10(0.6691)}{0.9986} \\ &\approx 6.7 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 61

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $A = 30°, a = 2.5$ และ $b = 3.41$ จงหาขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30°}{2.5} = \frac{\sin B}{3.41}$

$$\sin B = \frac{3.41\sin 30°}{2.5}$$

$$= 0.682$$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $(0° < B < 90°)$ หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $(90° < B < 180°)$

พิจารณา $0° < B < 90°$ เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.682 \approx 43°$

ดังนั้น $B \approx 43°$

พิจารณา $90° < B < 180°$ เนื่องจาก $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$

นั่นคือ $\sin B = \sin(180° - \arcsin 0.682)$

ดังนั้น $B \approx 180° - 43°$ หรือ $B \approx 137°$

ถ้า $B \approx 43°$ จะได้ $A + B \approx 73°$ ซึ่งน้อยกว่า $180°$

แสดงว่ามุม B เป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $B \approx 137°$ จะได้ $A + B \approx 167°$ ซึ่งน้อยกว่า $180°$

แสดงว่ามุม B เป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B มีได้สองค่า คือ ประมาณ $43°$ และ $137°$ ■

ตัวอย่างที่ 62

ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้า $A = 30°$, $a = 32$ และ $b = 24$ จงหาขนาดของมุม B

วิธีทำ จากกฎของไซน์ $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$

ดังนั้น $\frac{\sin 30°}{32} = \frac{\sin B}{24}$

$$\sin B = \frac{24 \sin 30°}{32}$$

$$= 0.375$$

เนื่องจาก $\sin B > 0$ ดังนั้น มุม B อาจเป็นมุมแหลม $(0° < B < 90°)$ หรือมุม B อาจเป็นมุมป้าน $(90° < B < 180°)$

พิจารณา $0° < B < 90°$ เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ $\arcsin 0.375 \approx 22°$

ดังนั้น $B \approx 22°$

พิจารณา $90° < B < 180°$ เนื่องจาก $\sin \alpha = \sin(180° - \alpha)$

นั่นคือ $\sin B = \sin(180° - \arcsin 0.375)$

ดังนั้น $B \approx 180° - 22°$ หรือ $B \approx 158°$

ถ้า $B \approx 22°$ จะได้ $A + B \approx 52°$ ซึ่งน้อยกว่า $180°$

แสดงว่ามุม B เป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้า $B \approx 158°$ จะได้ $A + B \approx 188°$ ซึ่งมากกว่า $180°$

แสดงว่ามุม B ไม่เป็นมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC

ดังนั้น ขนาดของมุม B มีเพียงค่าเดียว คือ ประมาณ $22°$ ■

แบบฝึกหัด 1.8

1. ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงใช้กฎของโคไซน์เพื่อหาค่าต่อไปนี้
   1) ค่าของ a เมื่อกำหนดให้ $A = 60°$, $b = 40$ และ $c = 60$
   2) ค่าของ b เมื่อกำหนดให้ $B = 120°$, $a = 4$ และ $c = 6$
   3) ค่าของ c เมื่อกำหนดให้ $C = 133°$, $a = 193$ และ $b = 80$
   4) ขนาดของมุม B เมื่อกำหนดให้ $a = 12, b = 7$ และ $c = 8$
   5) ขนาดของมุม A เมื่อกำหนดให้ $a = 8.4$, $b = 3.7$ และ $c = 5.2$

2. ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงใช้กฎของไซน์เพื่อหาค่าต่อไปนี้
   1) ค่าของ c เมื่อกำหนดให้ $A = 45°$, $C = 60°$ และ $b = 20$
   2) ค่าของ a เมื่อกำหนดให้ $B = 65°$, $A = 30°$ และ $c = 32$
   3) ค่าของ a และ c เมื่อกำหนดให้ $A = 105°, C = 60°$ และ $b = 4$

3. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ เมื่อกำหนดให้
   1) $a = 15$, $b = 20$ และ $C = 65°$
   2) $b = 80, c = 5.5$ และ $A = 103.5°$
   3) $a = 14.1, c = 27.4$ และ $B = 112°$

4. รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานรูปหนึ่งมีขนาดของมุมภายในมุมหนึ่งเป็น 135 องศา ถ้าด้านประกอบมุมนี้ยาว 5 และ 10 เซนติเมตร แล้วเส้นทแยงมุมเส้นที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวเท่าใด

5. จงหาความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีฐานยาว 60 หน่วย และมุมยอดมีขนาด 30 องศา

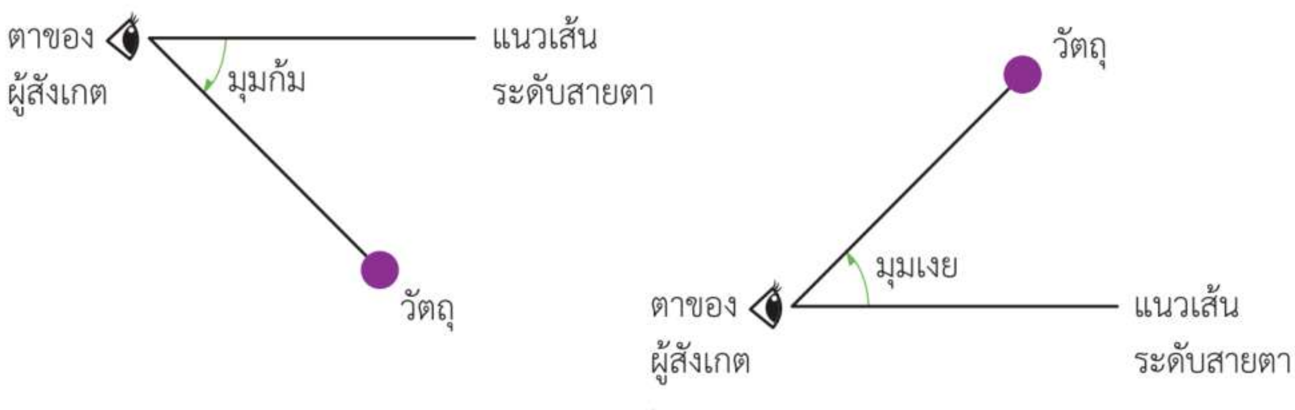
6. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว 24 และ 32 เซนติเมตร จงหาขนาดของมุมแหลมที่เกิดจากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ตัดกัน

7. บ้านของหมอก ขวัญ และคะนึง ปลูกเรียงกันตามลำดับในแนวเส้นตรงเดียวกันอยู่ริมฝั่งคลองด้านหนึ่ง บ้านของขวัญและคะนึง อยู่ห่างกัน 50 เมตร บ้านของฤดีอยู่ริมฝั่งคลองตรงกันข้ามกับบ้านของหมอกพอดี ถ้าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างบ้านของฤดีกับบ้านของขวัญและส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างบ้านของฤดีกับบ้านของคะนึงทำมุมกัน 30 องศา และมุมที่เกิดจากส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างบ้านของคะนึงกับบ้านของฤดีทำกับแนวริมฝั่งคลองเป็น 45 องศา จงหาความกว้างของคลองนี้ (สมมติว่าฝั่งคลองทั้งสองด้านขนานกัน)

1.9 การหาระยะทางและความสูง

ในการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการหาระยะทางและความสูง ซึ่งบางครั้งใช้เครื่องมือวัดโดยตรงไม่ได้ เช่น การวัดความสูงของภูเขา การหาความกว้างของแม่น้ำ สามารถทำได้โดยอาศัยความรู้เรื่องฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะมีขนาดของมุมเข้ามาเกี่ยวข้องรวมทั้ง **มุมก้ม (angle of depression)** และ **มุมเงย (angle of elevation)**

มุมก้มและมุมเงยเป็นมุมที่เกิดจากแนวเส้นระดับสายตา และแนวเส้นจากตาไปยังวัตถุ ถ้าวัตถุอยู่ต่ำกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมก้ม** แต่ถ้าวัตถุอยู่สูงกว่าแนวเส้นระดับสายตา มุมที่ได้เรียกว่า **มุมเงย** ดังรูป โดยขนาดของมุมก้มและมุมเงยจะเป็นจำนวนจริงบวกเสมอ

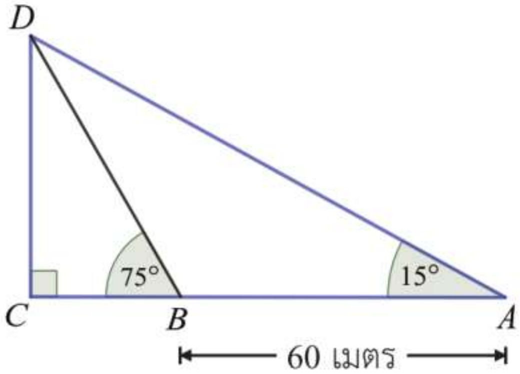


รูปที่ 36

ตัวอย่างที่ 63

เนตรยืนอยู่บนสนามแห่งหนึ่งมองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 15 องศา แต่เมื่อเดินตรงเข้าไปหาเสาธงอีก 60 เมตร เขามองเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 75 องศา ถ้าเนตรสูง 150 เซนติเมตร แล้วจงหาความสูงของเสาธง

วิธีทำ



ให้ A เป็นจุดที่เนตรยืนมองยอดเสาธงในครั้งแรก

B เป็นจุดที่เนตรยืนมองยอดเสาธงในครั้งหลัง

และ CD เป็นความสูงของเสาธงส่วนที่เหนือระดับสายตา

จะได้ ระยะ AB เท่ากับ 60 เมตร

เนื่องจาก $C\hat{A}D = 15^\circ$ และ $C\hat{B}D = 75^\circ$

จะได้ $A\hat{B}D = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$

ดังนั้น $A\hat{D}B = 180^\circ - 105^\circ - 15^\circ = 60^\circ$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABD จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin 15^\circ}{BD} = \frac{\sin 60^\circ}{AB}$$

$$BD = \frac{AB\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\begin{aligned} CD &= BD\sin 75^\circ \\ &= \frac{AB\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}(\sin 75^\circ) \\ &= 60\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 15^\circ \sin 75^\circ\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{60}{\sqrt{3}}(2\sin 15^\circ \cos 15^\circ) \text{ (เนื่องจาก } \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ\text{)}$$

$$= \frac{60\sqrt{3}}{3}\sin 2(15^\circ)$$

$$= 20\sqrt{3}\sin 30^\circ$$

$$= 20\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 10\sqrt{3}$$

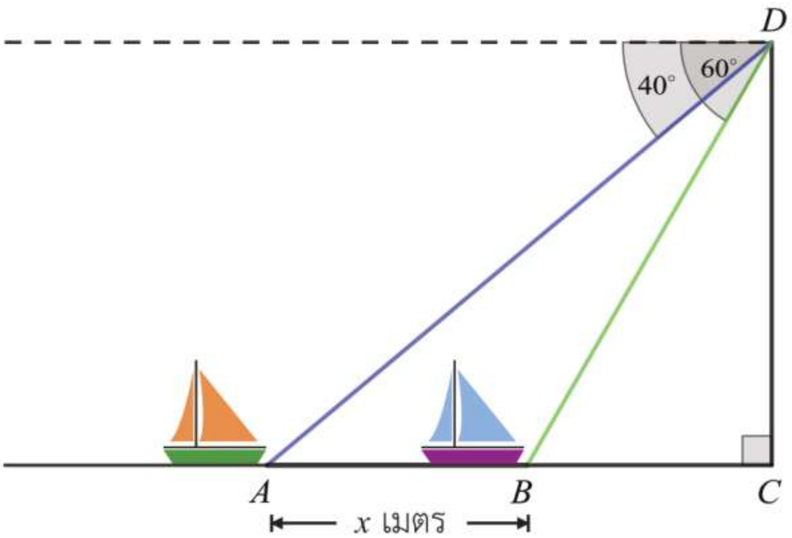
$$\approx 17.32$$

เนื่องจากเนตรสูง 1.50 เมตร ดังนั้น เสาธงสูงประมาณ $17.32 + 1.50$ หรือ 18.82 เมตร

ตัวอย่างที่ 64

จากหน้าผาซึ่งสูง 200 เมตร จากระดับน้ำทะเลปานกลาง ผู้สังเกตการณ์คนหนึ่งมองเห็นเรือสองลำทอดสมออยู่ในทะเลเป็นมุมก้ม 40 และ 60 องศา จากเส้นระดับสายตาเส้นเดียวกัน จงหาว่าเรือทั้งสองลำนั้น อยู่ห่างกันเท่าใด

วิธีทำ



ให้ A และ B เป็นตำแหน่งของเรือสองลำ โดยให้เรือทั้งสองห่างกัน x เมตร และ CD เป็นความสูงของหน้าผา

จะได้ว่า $CD = 200$ และ $A\hat{D}B = 60° - 40° = 20°$
โดยใช้ความรู้เรื่องเส้นขนาน จะได้ว่า $D\hat{A}B = 40°$ และ $D\hat{B}C = 60°$
พิจารณารูปสามเหลี่ยม BCD จะได้

$$\sin D\hat{B}C = \frac{CD}{BD}$$

$$\sin 60° = \frac{200}{BD}$$

ดังนั้น
$$BD = \frac{200}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{400\sqrt{3}}{3}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ADB จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{D}B}{x} = \frac{\sin D\hat{A}B}{BD}$$

$$\frac{\sin 20°}{x} = \frac{\sin 40°}{BD}$$

$$x = \frac{BD \sin 20°}{\sin 40°}$$

$$= \frac{400\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sin 20°}{2\sin 20° \cos 20°}\right)$$

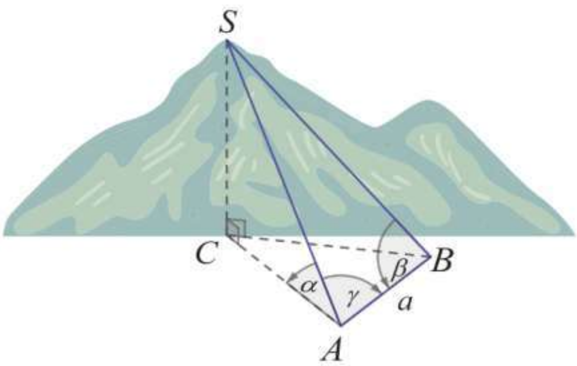
$$= \frac{400\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2\cos 20°}\right)$$

$$\approx 122.88$$

ดังนั้น เรือสองลำอยู่ห่างกันประมาณ 122.88 เมตร ■

ตัวอย่างที่ 65

จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความสูงของภูเขาตามแนว SC ถ้าวัดระยะ AB ในแนวราบบนพื้นดินได้ a หน่วย และวัดมุม SAC มุม SBA และมุม SAB ได้เป็น α, β และ γ ตามลำดับ



วิธีทำ พิจารณารูปสามเหลี่ยม SAB จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin A\hat{S}B}{a} = \frac{\sin\beta}{SA}$$

$$\sin\left(180^\circ - (\gamma+\beta)\right) = \frac{a\sin\beta}{SA}$$

$$SA = \frac{a\sin\beta}{\sin(\gamma+\beta)}$$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม SCA จากกฎของไซน์ จะได้

$$\frac{\sin 90^\circ}{SA} = \frac{\sin\alpha}{SC}$$

$$SC = SA\sin\alpha$$

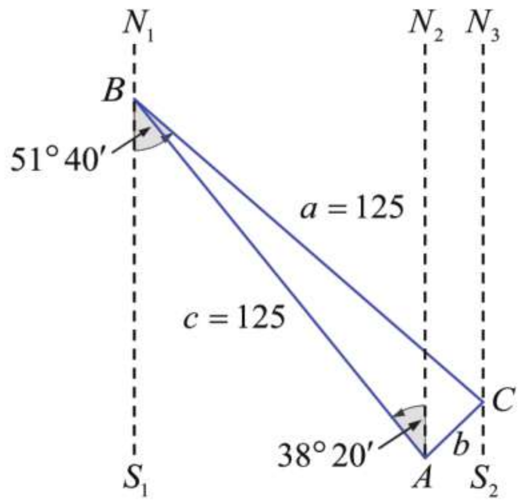
$$= \frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\gamma+\beta)}$$

ดังนั้น ภูเขาสูง $\frac{a\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\gamma+\beta)}$ หน่วย ■

ตัวอย่างที่ 66

จากจุด A นักบินบินไปยังจุด B ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก โดยทำมุม $38^\circ 20'$ กับทิศเหนือ เป็นระยะทาง 125 ไมล์ และบินไปยังจุด C เป็นระยะทาง 125 ไมล์ ในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันออก โดยทำมุม $51^\circ 40'$ กับทิศใต้ จงหาว่านักบินจะต้องบินจากจุด C ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก เป็นระยะทางเท่าใด โดยบินทำมุมเท่าใดกับทิศใต้ เพื่อกลับไปยังจุด A

วิธีทำ จากโจทย์สามารถเขียนรูปได้ดังนี้



จากรูป $\overline{S_1N_1}$ ขนานกับ $\overline{AN_2}$ จะได้ $S_1\hat{B}A = 38^\circ 20'$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม ABC จะได้ $A\hat{B}C = 51^\circ 40' - 38^\circ 20' = 13^\circ 20'$

จากกฎของโคไซน์ จะได้

$$
\begin{aligned}
b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos A\hat{B}C \\
&= 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)\cos 13^\circ 20' \\
&\approx 125^2 + 125^2 - 2(125)(125)\cos 13.33^\circ \\
&\approx 2(125^2)(1 - 0.9731) \\
&\approx 840.625
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $b \approx 29$

จากกฎของไซน์ จะได้

$$\sin B\hat{A}C = \frac{a\sin A\hat{B}C}{b}$$

$$\approx \frac{125\sin 13^\circ 20'}{29}$$

$$\approx \frac{125\sin 13.33^\circ}{29}$$

$$\approx \frac{125(0.2306)}{29}$$

$$\approx 0.9940$$

จะได้ $B\hat{A}C \approx 83.72^\circ$

ดังนั้น $C\hat{A}N_2 \approx 83.72^\circ - 38.33^\circ$ นั่นคือ $C\hat{A}N_2 \approx 45.39^\circ$

จะได้ $A\hat{C}S_2 \approx 45.39^\circ$

ดังนั้น นักบินต้องบินจากจุด C ไปในแนวเฉียงไปทางทิศตะวันตก เป็นระยะทางประมาณ 29 ไมล์ โดยบินทำมุมประมาณ 45.39° กับทิศใต้ เพื่อกลับไปยังจุด A ■

แบบฝึกหัด 1.9

1. พิเชษฐ์ยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่งเป็นระยะทางตามแนวราบ 18 เมตร เขามองเห็นยอดตึกและยอดเสาอากาศซึ่งอยู่บนยอดตึกเป็นมุมเงย 45 และ 60 องศา ตามลำดับ จงหาความสูงของเสาอากาศ

2. เรือสองลำแล่นออกจากจุด O พร้อมกัน โดยเรือลำหนึ่งแล่นไปยังจุด A เป็นระยะทาง 6 กิโลเมตร และอีกลำหนึ่งแล่นไปยังจุด B เป็นระยะทาง 4 กิโลเมตร ถ้าแนวที่เรือสองลำแล่นออกจากกันทำมุม 30 องศา แล้วจงหาระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B

3. ขณะที่เรือใบของทิพย์อยู่ห่างจากแนวชายฝั่งเป็นระยะทาง 500 เมตร ทิพย์มองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงย 24 องศา
   1) จงหาความสูงของหน้าผา
   2) เมื่อเรือใบของทิพย์อยู่ห่างจากแนวชายฝั่ง 200 เมตร ทิพย์จะมองเห็นยอดหน้าผาด้วยมุมเงยเท่าใด

4. เมื่อพิชัยยืนอยู่บนพื้นราบห่างจากเสาอากาศของสถานีโทรทัศน์แห่งหนึ่งเป็นระยะทาง 100 เมตร จะมองเห็นยอดเสาอากาศเป็นมุมเงย θ องศา และเมื่อเขายืนอยู่ห่างจากเสาอากาศเป็นระยะทาง 200 เมตร จะมองเห็นยอดเสาอากาศเป็นมุมเงย α องศา ถ้ามุมเงยทั้งสองนั้นรวมกันได้หนึ่งมุมฉาก แล้วเสาอากาศสูงเท่าใด

5. ก้านยืนอยู่บนดาดฟ้าของตึก 15 ชั้น เขามองเห็นป้อมยามที่อยู่ทางทิศตะวันออกของตึกเป็นมุมก้ม 60 องศา และมองเห็นรถบรรทุกคันหนึ่งจอดอยู่ทางทิศใต้ของป้อมยามเป็นมุมก้ม 30 องศา จงหาว่ารถบรรทุกอยู่ห่างจากป้อมยามเท่าใด ถ้าก้านสูง 170 เซนติเมตร และตึกสูงชั้นละ 4 เมตร

6. นรินทร์ต้องการถ่ายภาพของตนเอง โดยติดตั้งกล้องถ่ายรูปเข้ากับขาตั้งกล้องซึ่งสูง 140 เซนติเมตร และยืนหน้ากล้องห่างจากจุดที่ตั้งกล้อง 230 เซนติเมตร ถ้านรินทร์สูง 170 เซนติเมตร และกล้องมีมุมรับภาพทั้งมุมก้มและมุมเงยเป็น 30 องศา จงพิจารณาว่ากล้องจะสามารถถ่ายภาพเต็มตัวของนรินทร์ได้หรือไม่ ถ้าไม่ได้ นรินทร์จะต้องยืนห่างจากจุดที่ตั้งกล้องอย่างน้อยเท่าใด จึงจะได้ภาพถ่ายเต็มตัว

7. จากยอดหอคอยซึ่งสูง h เมตร สังเกตเห็นวัตถุ 2 ชิ้น ซึ่งอยู่บนพื้นราบในทิศทางเดียวกันและอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เป็นมุมก้ม $45-\alpha$ และ $45+\alpha$ องศา จงแสดงว่าวัตถุทั้งสองอยู่ห่างกัน $2h\tan 2\alpha$ เมตร

8. จงหา
   1) ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบในวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร
   2) ความยาวของเส้นรอบรูปของรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าแนบนอกวงกลมที่มีรัศมียาว 5 เซนติเมตร

9. หอคอยแห่งหนึ่งสูง 60 เมตร ตั้งอยู่บนยอดเขา จากจุดที่อัญชันยืนอยู่สามารถมองเห็นยอดหอคอยด้วยมุมเงย 49 องศา และมองเห็นฐานหอคอยด้วยมุมเงย 37 องศา จงหาว่าฐานหอคอยอยู่ห่างจากอัญชันเท่าใด และจงหาความสูงของภูเขา

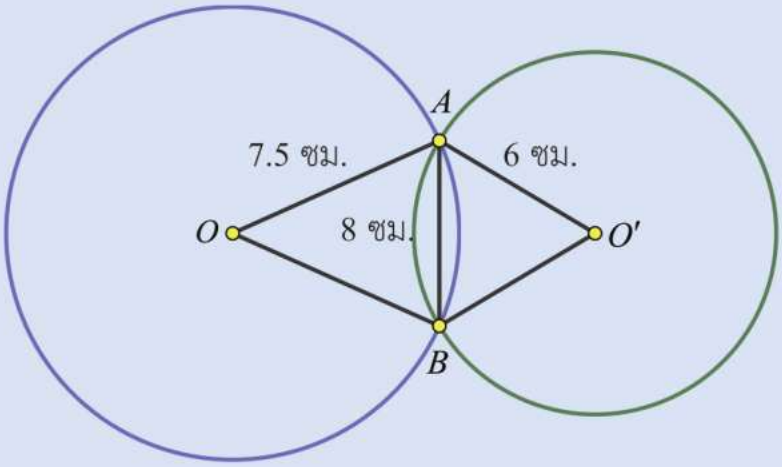
10. มหาพีระมิดแห่งกีซาเริ่มแรกได้รับการบันทึกไว้ว่าสูงประมาณ 146.5 เมตร แต่เนื่องจากถูกพายุและกระแสลมทำให้เกิดการสึกกร่อน ปัจจุบันความสูงของพีระมิดจึงลดลง ถ้าวัดมุมเงยที่ระยะห่างจากปลายฐานของพีระมิด 30 และ 60 เมตร ได้ 43.71 และ 38.39 องศา ตามลำดับ แล้วจงหาความสูงของพีระมิดในปัจจุบัน

เสริมสมอง : มหาพีระมิดแห่งกีซา



มหาพีระมิดแห่งกีซา (Great Pyramid of Giza) เป็นพีระมิดที่มีขนาดใหญ่และเก่าแก่ที่สุดในหมู่พีระมิดทั้งสามแห่งกีซาในประเทศอียิปต์ เชื่อว่ามหาพีระมิดแห่งกีซาสร้างขึ้นในสมัยฟาโรห์คูฟู (Khufu) แห่งราชวงศ์ที่ 4 ซึ่งปกครองอียิปต์โบราณ เพื่อใช้เป็นที่เก็บรักษาพระศพไว้รอการกลับคืนชีพตามความเชื่อของชาวอียิปต์ในยุคนั้น โดยใช้เวลาในการสร้างประมาณ 10 – 20 ปี สร้างเสร็จประมาณ 2,560 ปีก่อนคริสต์ศักราช มหาพีระมิดแห่งกีซาได้รับการยกย่องให้เป็นหนึ่งในเจ็ดสิ่งมหัศจรรย์ของโลกยุคโบราณและถือได้ว่าเป็นสัญลักษณ์ของประเทศอียิปต์

11. วงกลมสองวงซึ่งมีรัศมียาว 7.5 และ 6 เซนติเมตร ตัดกันและมีคอร์ดร่วมยาว 8 เซนติเมตร ดังรูป



จงหาขนาดของมุม AOB และมุม $AO'B$

กิจกรรม : สูงเท่าใดให้ถูกกฎหมาย

ในการก่อสร้างอาคารสูงจะต้องอยู่ภายใต้ข้อบังคับของกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 โดยข้อ 41 และ 44 ว่าด้วยเรื่องการกำหนดแนวอาคารและระยะต่าง ๆ ของอาคาร ระบุไว้ดังนี้

ข้อ 41 อาคารที่ก่อสร้างหรือดัดแปลงใกล้ถนนสาธารณะที่มีความกว้างน้อยกว่า 6 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 3 เมตร
อาคารที่สูงเกินสองชั้น หรือเกิน 8 เมตร ห้องแถว ตึกแถว บ้านแถว อาคารพาณิชย์ โรงงาน อาคารสาธารณะ ป้าย หรือสิ่งที่สร้างขึ้นสำหรับติดหรือตั้งป้าย หรือคลังสินค้า ที่ก่อสร้างหรือดัดแปลงใกล้ถนนสาธารณะ

(1) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างน้อยกว่า 10 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากกึ่งกลางถนนสาธารณะอย่างน้อย 6 เมตร
(2) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างตั้งแต่ 10 เมตรขึ้นไป แต่ไม่เกิน 20 เมตร ให้ร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนสาธารณะอย่างน้อย 1 ใน 10 ของความกว้างของถนนสาธารณะ
(3) ถ้าถนนสาธารณะนั้นมีความกว้างเกิน 20 เมตรขึ้นไป ให้ร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนสาธารณะอย่างน้อย 2 เมตร

ข้อ 44 ความสูงของอาคารไม่ว่าจากจุดหนึ่งจุดใด ต้องไม่เกินสองเท่าของระยะราบ วัดจากจุดนั้นไปตั้งฉากกับแนวเขตด้านตรงข้ามของถนนสาธารณะที่อยู่ใกล้อาคารนั้นที่สุด
ความสูงของอาคารให้วัดแนวดิ่งจากระดับถนนหรือระดับพื้นดินที่ก่อสร้างขึ้นไปถึงส่วนของอาคารที่สูงที่สุด สำหรับอาคารทรงจั่วหรือปั้นหยาให้วัดถึงยอดผนังของชั้นสูงสุด

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร จะต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนเท่าใด จึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41

2. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุดเท่าใด

3. สมมติว่าอาคารแห่งหนึ่งร่นแนวอาคารห่างจากถนนสาธารณะที่กว้าง 8 เมตร เป็นระยะทางตามข้อ 1 และมีความสูงตามข้อ 2 ถ้าต้องการถ่ายภาพป้ายซึ่งอยู่ต่ำกว่าส่วนที่สูงที่สุดของอาคารเป็นระยะ 2 เมตร โดยตั้งขาตั้งกล้องที่มีความสูง 1.2 เมตร เพื่อถ่ายภาพจากทางเท้าของถนนฝั่งตรงข้ามของอาคาร จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยกี่องศา

4. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ จะต้องร่นแนวอาคารห่างจากเขตถนนเท่าใด จึงจะใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 41

5. ถ้าต้องการสร้างอาคารบนที่ดินซึ่งอยู่ติดถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ ให้ใกล้ถนนสาธารณะที่สุดและเป็นไปตามกฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522 ข้อ 44 จะสร้างอาคารที่มีความสูงได้มากที่สุดเท่าใด

6. สมมติว่าอาคารแห่งหนึ่งร่นแนวอาคารห่างจากถนนสาธารณะที่กว้าง x เมตร โดยที่ $10 \le x \le 20$ เป็นระยะทางตามข้อ 4 และมีความสูงตามข้อ 5 ถ้าต้องการถ่ายภาพป้ายซึ่งอยู่ต่ำกว่าส่วนที่สูงที่สุดของอาคารเป็นระยะ 2 เมตร โดยตั้งขาตั้งกล้องที่มีความสูง 1.2 เมตร เพื่อถ่ายภาพจากทางเท้าของถนนฝั่งตรงข้ามของอาคาร จะต้องตั้งกล้องถ่ายภาพให้ทำมุมเงยกี่องศา

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนจริงต่อไปนี้

1) -53π
2) $\frac{11\pi}{2}$
3) $\frac{11\pi}{4}$
4) $\frac{14\pi}{3}$
5) $\frac{35\pi}{6}$
6) $-\frac{11\pi}{3}$
7) $-\frac{19\pi}{6}$
8) $-\frac{49\pi}{4}$

2 กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ และ $\sin\theta = \frac{60}{61}$ จงหาค่าของ

1) $\sin(2\pi - \theta)$
2) $\operatorname{cosec}(-\theta)$
3) $\cos(2\pi - \theta)$
4) $\tan(3\pi + \theta)$
5) $\cot(\pi - \theta)$
6) $\sec(\theta - 2\pi)$

3 กำหนดให้ $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ และ $\cot\theta = \frac{8}{15}$ จงหาค่าของ $\cos\theta + \operatorname{cosec}\theta$

4 กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$ และ $\cos\theta = -\frac{35}{37}$ จงหาค่าของ $\sec\theta + \tan\theta$

5 กำหนดให้ $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le 2\pi$ และ $\tan\theta = -\frac{1}{6}$ จงหาค่าของ $\cot\theta - \cos\theta$

6 จงหาค่าของ

1) $\sec\frac{5\pi}{6} + \operatorname{cosec}\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{4\pi}{3}$
2) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \tan\frac{5\pi}{4}$

3) $\sin\frac{2\pi}{3}\cos\frac{2\pi}{3}-\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)\tan\frac{2\pi}{6}$

4) $\tan^2\frac{\pi}{12}+\cot^2\frac{11\pi}{12}-\sec^2\frac{23\pi}{12}-\operatorname{cosec}^2\frac{13\pi}{12}$

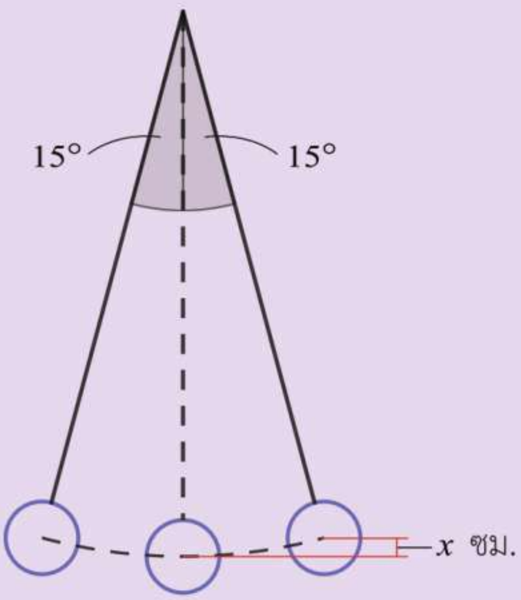
7. จงพิจารณาว่า มีจำนวนจริง θ ใดหรือไม่ ที่ทำให้ $|\sec\theta|<1$ พร้อมให้เหตุผล

8. จงพิจารณาว่า มีจำนวนจริง θ ใดหรือไม่ ซึ่ง $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ และ $\tan\theta=5$ พร้อมให้เหตุผล

9. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ที่มุม A และมุม C มีขนาด 110 และ 30 องศา ตามลำดับ และด้าน AB ยาว 6 เซนติเมตร จงหาความยาวของด้าน BC และ CA

10. จงหาความยาวของเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีฐานยาว 40 นิ้ว และมุมที่ฐานมีขนาด 70 องศา

11. ลูกตุ้มที่แขวนไว้กับเชือกที่มีความยาว 90 เซนติเมตร แกว่งทำมุมขนาด 15 องศากับแนวดิ่ง ดังรูป ถ้าระยะระหว่างตำแหน่งสูงสุดและต่ำสุดของลูกตุ้มเป็น x เซนติเมตร แล้วจงหาค่าของ x



12 จงหาคาบ แอมพลิจูด และเรนจ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1) $y=\frac{1}{2}\cos\theta$

2) $y=\frac{1}{2}\sin 4\theta$

⭐ 3) $y=\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$

⭐ 4) $y=-\frac{1}{2}\sin(-2\theta)$

⭐ 5) $y=-2\sin\frac{1}{2}\theta-1$

⭐ 6) $y=-2\cos\frac{1}{2}\theta+1$

⭐ 7) $y=2\sin 2\theta+1$

⭐ 8) $y=2\cos 2\theta-1$

13 จงจับคู่ฟังก์ชันกับกราฟที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $y=2\sin 3x$

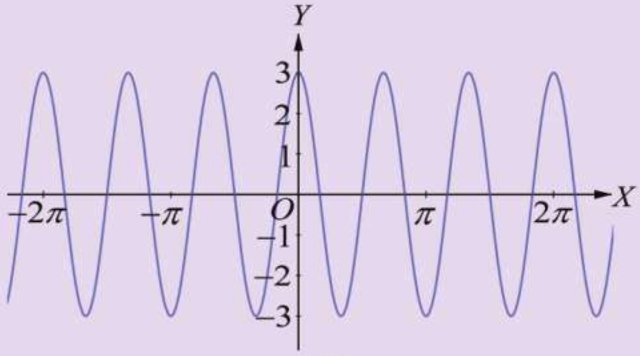
2) $y=2\sin\frac{x}{3}$

3) $y=-\frac{3}{2}\sin\frac{x}{3}$

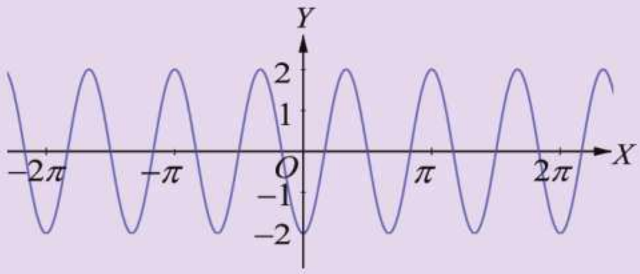
4) $y=-2\cos 3x$

5) $y=-\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}$

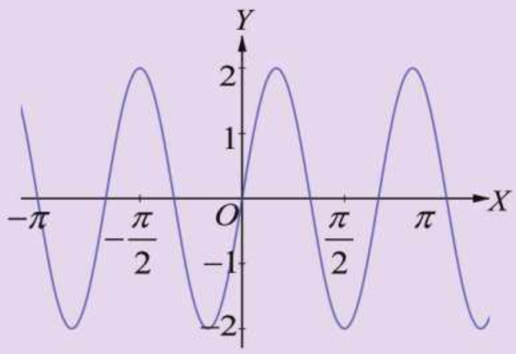
6) $y=3\cos 3x$



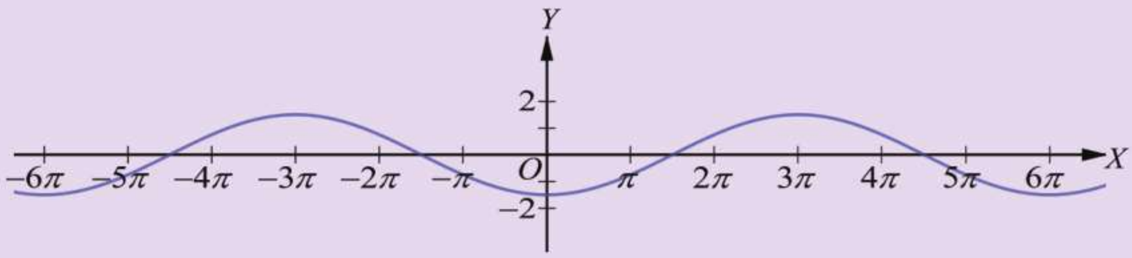
(ก)



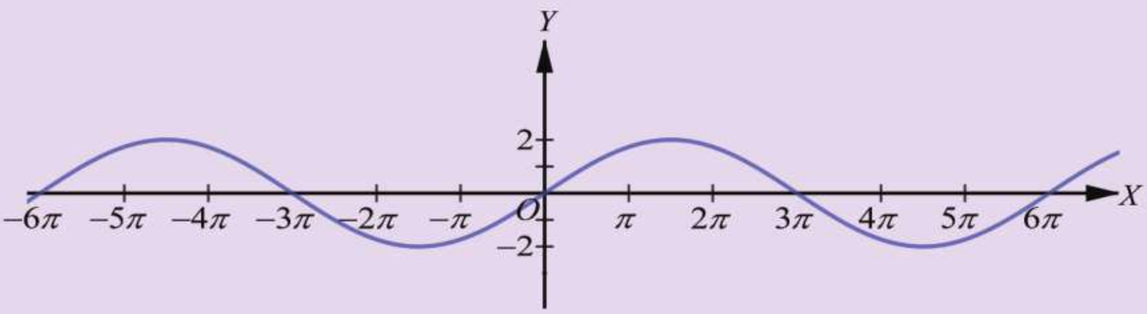
(ข)


Y
X
O
2
1
−1
−2
−π
π
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$

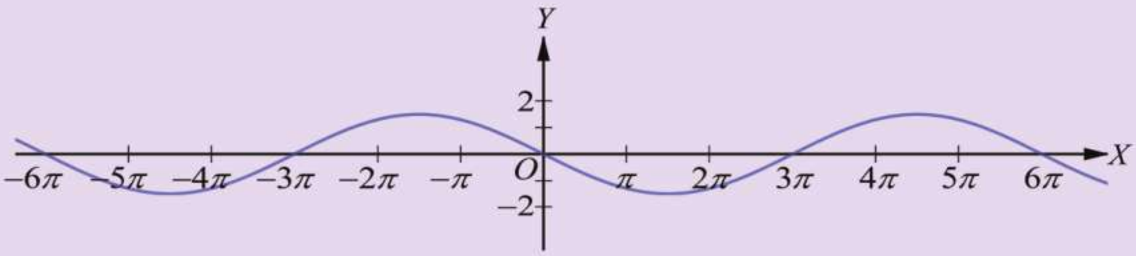
(ค)


Y
X
O
2
−2
−6π −5π −4π −3π −2π −π π 2π 3π 4π 5π 6π

(ง)


Y
X
O
2
−2
−6π −5π −4π −3π −2π −π π 2π 3π 4π 5π 6π

(จ)


Y
X
O
2
−2
−6π −5π −4π −3π −2π −π π 2π 3π 4π 5π 6π

(ฉ)

14 จงหาค่าของ

1) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$

2) $\cos 165^\circ$

3) $\sin 105^\circ$

4) $\tan 285^\circ$

5) $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

6) $\cot\left(-\frac{17\pi}{12}\right)$

7) $\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}-\sin\frac{3\pi}{20}\sin\frac{7\pi}{20}$

8) $\frac{\tan 74^\circ-\tan 14^\circ}{1+\tan 74^\circ\tan 14^\circ}$

9) $\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{5\pi}{12}-\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)\sin\frac{5\pi}{12}$

10) $\cos 100^\circ\cos 5^\circ-\sin 100^\circ\sin 5^\circ$

11) $\frac{1+\tan 15^\circ}{1-\tan 15^\circ}$

12) $2\sin\frac{11\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$

13) $\cos 165^\circ\cos 75^\circ$

14) $\sin 80^\circ\cos 25^\circ+\sin 100^\circ\cos 35^\circ+\cos 80^\circ\sin 25^\circ+\cos 100^\circ\sin 35^\circ$

15) $\cos 135^\circ+\cos 105^\circ+\cos 75^\circ$

16) $\sin 80^\circ-\sin 40^\circ-\sin 20^\circ$

15 จงหาค่าของ $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$, $\sin(\alpha-\beta)$ และ $\tan(\alpha-\beta)$ เมื่อกำหนดให้

1) $\sin\alpha=\frac{5}{13},\ -\frac{3\pi}{2}<\alpha<-\pi$ และ $\tan\beta=-\sqrt{3},\ \frac{\pi}{2}<\beta<\pi$

2) $\sec\alpha=-\frac{17}{8},\ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$ และ $\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\pi}{2}<\beta<-\pi$

16 ถ้า $\sin x=\frac{3}{5}$ และ $\sin(x+y)=-\frac{5}{13}$ เมื่อ $0<x<\frac{\pi}{2}$ และ $\pi<x+y<\frac{3\pi}{2}$ จงหา

1) $\cot x$

2) $\tan(x+y)$

3) $\sin y$

4) $\cos(x-y)$

17 ถ้า $\tan x=\frac{1}{2}$ จงหา $\cot 2x$

18 ถ้า $\cos 1.04 = 0.50$ จงหา $\sin 0.52$

19 จงแสดงว่า

1) $\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$

2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) = -\cos\theta$

3) $\tan(90^\circ - A) = \cot A$

4) $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$

5) $\tan(270^\circ - A) = \cot A$

6) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha-\tan\beta}$

7) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta} = 1+\cot\alpha\tan\beta$

8) $\cos(x+45^\circ)+\cos(x-45^\circ) = \sqrt{2}\cos x$

9) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

10) $\sec\alpha - \tan\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2\cos\alpha + \sin 2\alpha}$

11) $\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

12) $\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$

13) $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$

14) $(\operatorname{cosec}^2\alpha - 2)\tan 2\alpha = 2\cot\alpha$

20 จงหาค่าของ

1) $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

2) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

3) $\tan\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$

4) $\cot\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

5) $\operatorname{cosec}\left(\arctan\frac{1}{2}\right)$

6) $\cot\left(\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

7) $\operatorname{cosec}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$

8) $\sin(2\arccos a),\quad 0 < a \le 1$

9) $\arctan\left(\cos\frac{5\pi}{2}+\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

10) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

11) $\arccos\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$

12) $\tan\left(\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-\arcsin\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)$

⊛ 21. จงแสดงว่า

1) $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{12}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$

2) $2\arctan\frac{1}{3}=\arctan\frac{3}{4}$

3) $\sin(2\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$ เมื่อ $x\in[-1,1]$

⊛ 22. จงแสดงว่า

1) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง และ $-\frac{\pi}{2}<\arctan x+\arctan y<\frac{\pi}{2}$ แล้ว

$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

2) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง และ $\arctan x+\arctan y>\frac{\pi}{2}$ แล้ว

$\arctan x+\arctan y=\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

3) ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง และ $\arctan x+\arctan y<-\frac{\pi}{2}$ แล้ว

$\arctan x+\arctan y=-\pi+\arctan\frac{x+y}{1-xy}$

23 ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง และ $xy \neq 1$ แล้ว

$$\arctan x + \arctan y = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right); & xy < 1 \\ \pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right); & xy > 1,\ x > 0 \\ -\pi + \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right); & xy > 1,\ x < 0 \end{cases}$$

จงหาค่าของ

1) $\arctan 1 + \arctan 2 + \arctan 3$

2) $\arctan 1 + \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$

3) $\arctan(-3) + \arctan 0 + \arctan 3$

4) $\arctan(-1) + \arctan(-2) + \arctan(-3)$

24 จงพิสูจน์ว่า

1) $1 + \tan^2(-\theta) = \sec^2\theta$

2) $(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta) = 1$

3) $\tan^2\theta - \cot^2\theta = \sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta$

4) $\sec\theta - \sec\theta\sin^2\theta = \cos\theta$

5) $\dfrac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \cot\theta$

6) $\cot\theta\cos\theta + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

7) $\dfrac{1-\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta} = 2\sec\theta$

8) $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = (\sec\theta - \tan\theta)^2$

9) $\dfrac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \sin\theta + \cos\theta$

10) $\dfrac{\cot\theta}{1-\tan\theta} + \dfrac{\tan\theta}{1-\cot\theta} = 1 + \tan\theta + \cot\theta$

11) $\cot 2\theta + \tan\theta = \operatorname{cosec} 2\theta$

12) $\dfrac{\tan(\alpha-\beta) + \tan\beta}{1 - \tan(\alpha-\beta)\tan\beta} = \tan\alpha$

13) $\cot\alpha - \tan\alpha = 2\cot 2\alpha$

14) $\dfrac{\sin 2\theta + \sin\theta}{\cos 2\theta + \cos\theta + 1} = \tan\theta$

15) $\dfrac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta} = \tan 3\theta$

16) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ = \dfrac{1}{8}$

25 ถ้า $A+B+C=180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า

1) $\sin A = \sin(B+C)$

2) $\cos A = -\cos(B+C)$

㊝ 3) $\sin A+\sin B+\sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

㊝ 4) $\cos A+\cos B+\cos C = 1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

26 จงแก้สมการต่อไปนี้ เมื่อ $0 \le \theta < 2\pi$

1) $4\sin^2\theta - 3 = 0$

2) $2\cos^2\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$

3) $\cos^2\theta + \cos\theta = \sin^2\theta$

4) $3\tan^2\theta = 2\sec^2\theta + 1$

5) $\tan\theta = 2\sin\theta$

6) $3\sec\theta - \cos\theta + 2 = 0$

7) $\sqrt{3}\operatorname{cosec}^2\theta + 2\operatorname{cosec}\theta = 0$

8) $\cos 2\theta + 2\cos^2\frac{\theta}{2} = 1$

27 จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้ เมื่อ $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

1) $2\cos^2\theta + 2\cos 2\theta = 1$

2) $4\operatorname{cosec}\theta - 4\sin\theta = 2\sqrt{2}\cot\theta$

3) $\cos\theta + 4\sin\theta - \sin 2\theta = 2$

4) $\sin 3\theta\cos\theta - \cos 3\theta\sin\theta = \cos\theta$

28 จงแก้สมการต่อไปนี้

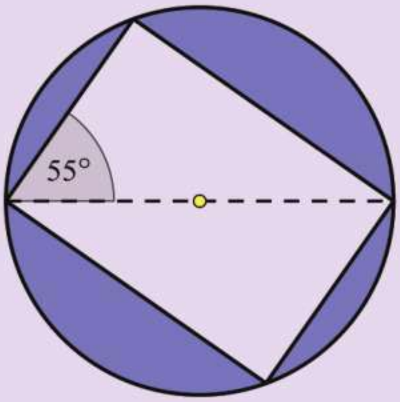
1) $\tan^2\theta - 3 = 0$

2) $\cos 2\theta = \sin\theta$

29 ให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ยาว a, b และ c หน่วย ตามลำดับ จงหาขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ

1) $B = 120^\circ$, $C = 35^\circ$ และ $a = 15$
2) $A = 102^\circ$, $B = 41^\circ$ และ $c = 52.8$
3) $a = 1$, $b = \sqrt{3}$ และ $c = 2$
4) $B = 60^\circ$, $b = 3\sqrt{2}$ และ $c = 3 + \sqrt{3}$
5) $B = 45^\circ$, $c = \sqrt{12}$ และ $b = \sqrt{8}$
6) $a = 3$, $b = 4$ และ $c = 5$

30 จากรูป แสดงรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแนบในวงกลมวงหนึ่งที่มีรัศมียาว 10 หน่วย จงหาพื้นที่ของส่วนที่แรเงา

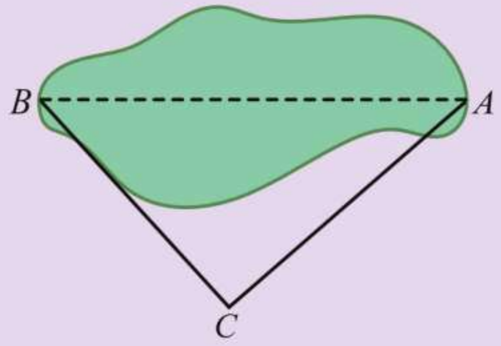


31 วิมลมีที่ดินอยู่แปลงหนึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมซึ่งมีมุมภายในมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก และด้านประกอบมุมฉากยาวเท่ากัน มุมที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากมีขนาด 30 องศา และด้านประกอบมุมนี้ยาว 20 และ 40 เมตร จงหาว่าที่ดินแปลงนี้ของวิมลมีพื้นที่กี่ตารางเมตร

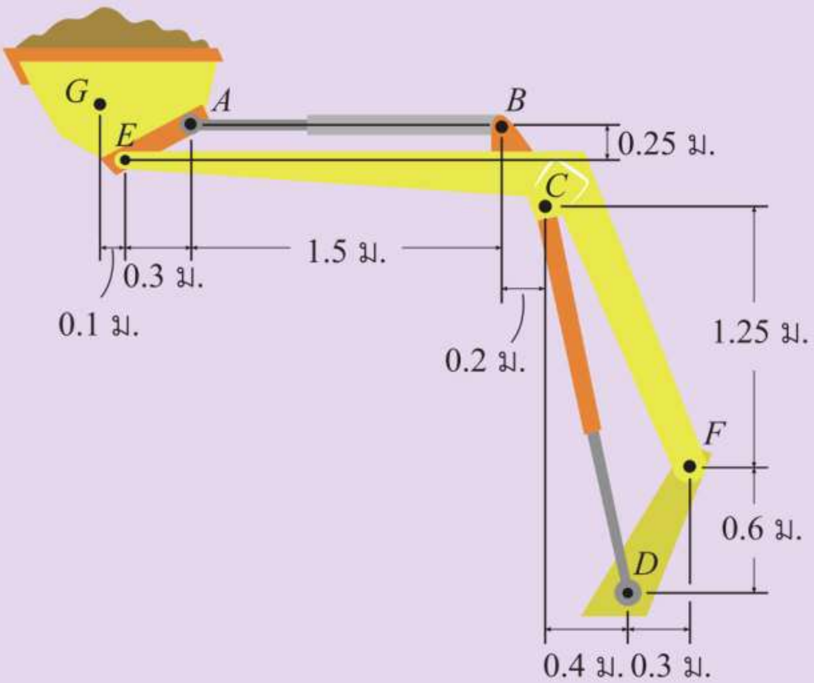
32. จงใช้กฎของโคไซน์ช่วยในการพิสูจน์ Heron's Formula (หรือ Hero's Formula) ที่กล่าวว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ เท่ากับ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมยาว a, b และ c หน่วย และ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

33 เรือสองลำทอดสมออยู่ห่างกัน 60 เมตร ในแนวเส้นตรงเดียวกับประภาคาร ถ้าทหารบนเรือแต่ละลำมองเห็นยอดประภาคารเป็นมุมเงย 45 และ 30 องศา จงหาว่าเรือลำที่อยู่ใกล้ประภาคารอยู่ห่างจากประภาคารเท่าใด

34 จากรูป ให้ A และ B เป็นจุดสองจุดที่อยู่ตรงข้ามกันของบึงแห่งหนึ่ง และ C เป็นจุดจุดหนึ่งบนพื้นราบเดียวกัน ถ้า CA และ CB เท่ากับ 3.2 และ 2.4 กิโลเมตร ตามลำดับ และวัดมุม ACB ได้ 75 องศา จงหาความกว้างของบึงจากจุด A ถึงจุด B



35 จากรูป จงคำนวณมุมระหว่างส่วนของเส้นตรง CD และ DF



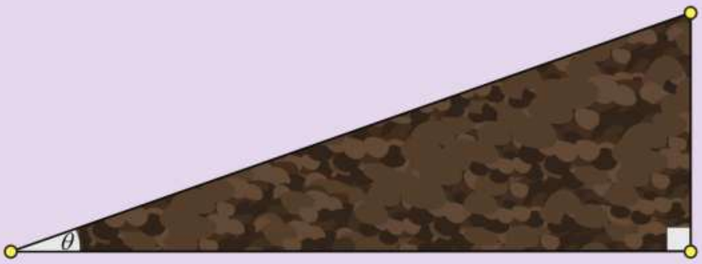
36 เพชรยืนอยู่ที่เชิงเขาแห่งหนึ่ง มองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 47 องศา ถ้าเดินขึ้นไปตามไหล่เขาซึ่งเอียงทำมุม 32 องศา กับแนวราบ เป็นระยะทาง 100 เมตร พบว่ามุมเงยที่มองยอดเขาเป็น 77 องศา โดยวัดจากแนวราบ จงหาความสูงของภูเขาลูกนี้

37 สุดายืนอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงใต้ของภูเขาลูกหนึ่งมองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 65 องศา เมื่อสุดาเดินตรงไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะทาง 500 เมตร จะมองเห็นยอดเขาเป็นมุมเงย 35 องศา จงหาความสูงของภูเขาลูกนี้

38 จากยอดประภาคารแห่งหนึ่ง พิณสังเกตเห็นจุด A และจุด B ที่อยู่ในทิศทางเดียวกันบนชายฝั่งด้วยมุมก้ม 30 และ 40 องศา ตามลำดับ ถ้าจุด A และจุด B ห่างกัน 100 เมตร จงหาว่ายอดประภาคารอยู่ห่างจากจุด A และจุด B เป็นระยะทางเท่าใด และจงหาความสูงของประภาคาร

39 ค่าความลาดชันของพื้นที่ลาดเอียงหาได้จากค่าสัมบูรณ์ของความชันของพื้นที่ลาดเอียงคูณด้วย 100 หากพื้นที่มีค่าความลาดชันโดยเฉลี่ย 35 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป จะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดิน

1) ถ้าเขียนแสดงพื้นที่ลาดเอียงได้ดังรูป จงหาว่าจะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดินในพื้นที่ดังกล่าว เมื่อมุม θ มีค่าตั้งแต่เท่าใดขึ้นไป



⊛ 2) กำหนดให้แผนที่ภูมิประเทศมีมาตราส่วน 1 : 50,000 และกำหนดช่วงความห่างของแต่ละเส้นชั้นความสูง 20 เมตร จงหาว่าจะไม่อนุญาตให้มีการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดินในพื้นที่ที่มีระยะห่างระหว่างเส้นชั้นความสูงน้อยกว่าหรือเท่ากับกี่มิลลิเมตร

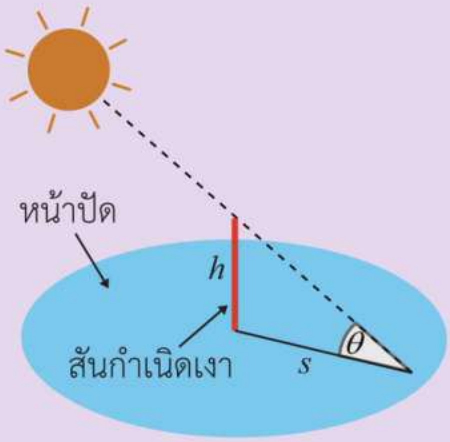
เสริมสมอง : ความลาดเอียงของพื้นที่

ความลาดเอียงของพื้นที่ หมายถึง ลักษณะของพื้นที่ที่มีระดับผิวหน้าไม่ราบเรียบเสมอกันทุกด้าน หากแต่มีการเทลาดจากขอบพื้นที่ด้านที่สูงกว่าเอียงลาดไปหาขอบอีกด้านที่ต่ำกว่า โดยมีค่าความลาดชันเป็นสิ่งบ่งบอกให้ทราบถึงความมากน้อยของความลาดเอียงของที่ดิน ซึ่งหากพื้นที่มีค่าความลาดชันโดยเฉลี่ย 35 เปอร์เซ็นต์ขึ้นไป จะไม่อนุญาตให้มีการออกโฉนดที่ดินหรือหนังสือรับรองการทำประโยชน์ตามประมวลกฎหมายที่ดิน เนื่องจากเป็นพื้นที่ที่มีการชะล้างหน้าดินสูงไม่เหมาะสมแก่การเกษตร สมควรเป็นพื้นที่ป่าไม้ ในการพิจารณาค่าความลาดชันของพื้นที่จะใช้แผนที่แสดงเส้นชั้นความสูงซึ่งเป็นเส้นแบ่งระหว่างบริเวณที่มีความสูงแตกต่างกันโดยอ้างอิงความสูงกับระดับน้ำทะเลปานกลาง ดังรูป



ตัวอย่างการแสดงเส้นชั้นความสูง มาตราส่วน 1 : 50,000

40 นาฬิกาแดดประกอบด้วยหน้าปัดและสันกำเนิดเงา ดังรูป



ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของเงาที่ปรากฏบนหน้าปัด (s) ความสูงของสันกำเนิดเงา (h) และมุมที่แสงอาทิตย์ทำกับหน้าปัด (θ) เขียนได้ดังนี้

$$s = h\cot\theta$$

เสริมสมอง : นาฬิกาแดด





ในสมัยโบราณมนุษย์บอกเวลาโดยการสังเกตเงาที่เกิดจากแสงอาทิตย์ ซึ่งจะเปลี่ยนแปลงไปตามตำแหน่งของดวงอาทิตย์ในช่วงเวลาต่าง ๆ ของวัน ตามการโคจรของโลกรอบดวงอาทิตย์ และได้สร้างนาฬิกาแดด (sundial) ขึ้นในเวลาต่อมา โดยอาศัยความรู้ทางตรีโกณมิติและดาราศาสตร์ เพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการบอกเวลาที่ละเอียดมากขึ้น ส่วนประกอบที่สำคัญของนาฬิกาแดด คือ สันกำเนิดเงา (gnomon) และหน้าปัด (dial) ซึ่งเป็นฉากรับเงาที่เกิดจากสันกำเนิดเงา

1) จงแสดงว่า $s = \dfrac{h\sin(90° - \theta)}{\sin\theta}$

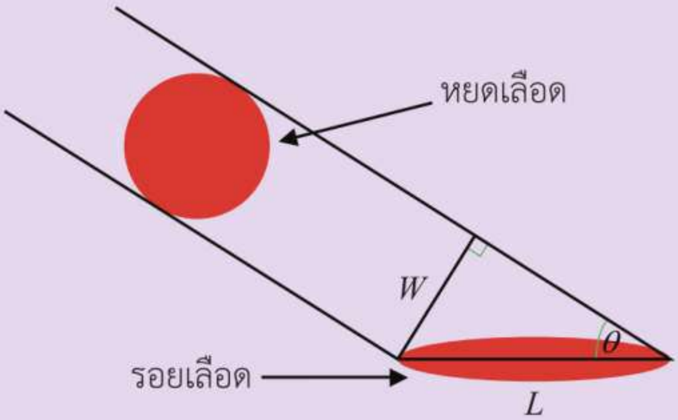
2) ให้สันกำเนิดเงาสูง 1 เมตร จงเติมตารางด้านล่างให้สมบูรณ์ พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของเงาที่ปรากฏบนหน้าปัดและมุมที่แสงอาทิตย์ทำกับหน้าปัด

θ	15°	30°	45°	60°	75°	90°
s						

3) จากตารางในข้อ 2) แสงอาทิตย์ทำมุมกับหน้าปัดเท่าใด จึงทำให้เงาที่ปรากฏบนหน้าปัดยาวมากที่สุดและน้อยที่สุด

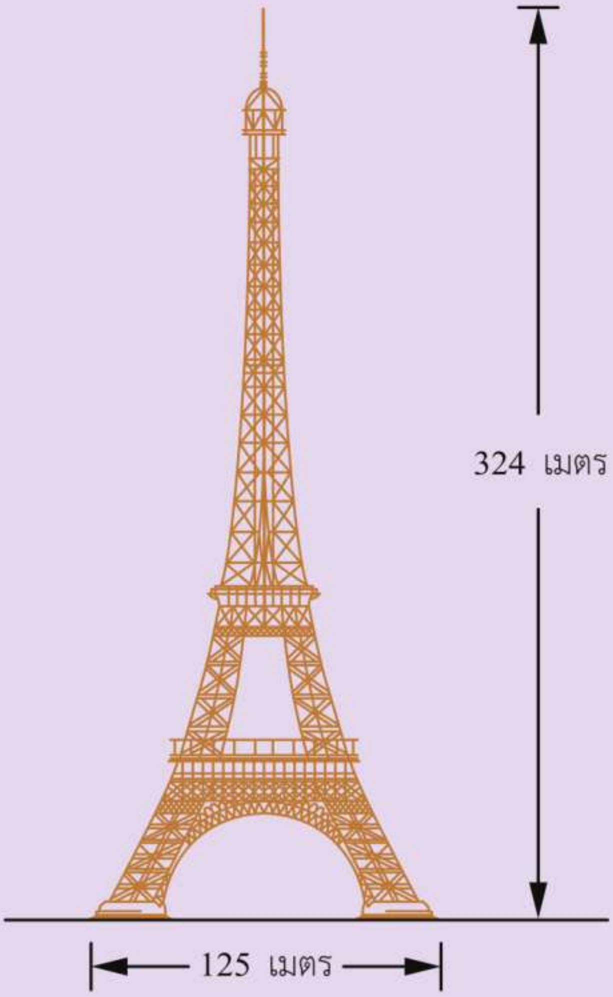
4) เมื่อแสงอาทิตย์ทำมุมฉากกับหน้าปัด แสดงว่าขณะนั้นเป็นเวลาเท่าใด

41 เมื่อหยดเลือดเคลื่อนที่โดยทำมุมฉากไปกระทบกับพื้นผิว เลือดจะกระจายตัวออกไปทุกทิศทุกทางเท่ากัน และจะได้รอยเลือดที่มีลักษณะเป็นวงกลม แต่ถ้าหยดเลือดเคลื่อนที่โดยทำมุม θ โดยที่ $0° < \theta < 90°$ ไปกระทบกับพื้นผิว เลือดจะกระจายตัวและยืดออกไปตามทิศทางการเคลื่อนที่ ซึ่งจะได้รอยเลือดมีลักษณะเป็นรูปวงรี เมื่อกำหนดให้ W แทนความกว้างของรอยเลือด และ L แทนความยาวของรอยเลือด จะสามารถหาขนาดของมุมที่เกิดจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของหยดเลือดทำกับพื้นได้จากสมการ $\sin\theta = \dfrac{W}{L}$ ดังแสดงในรูป



1) ชายคนหนึ่งถูกตีที่ศีรษะก่อนวิ่งหนีออกจากสถานที่เกิดเหตุ เมื่อพิจารณารอยเลือดบนพื้นในสถานที่เกิดเหตุ พบว่ารอยเลือดมีลักษณะเป็นรูปวงรีที่มีแกนโทยาว 5 มิลลิเมตร และแกนเอกยาว 6.5 มิลลิเมตร จงหาขนาดของมุมที่เกิดจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของหยดเลือดทำกับพื้น
2) พบรอยเลือดอีกรอยหนึ่งในบริเวณที่เกิดเหตุมีลักษณะเป็นรูปวงรีกว้าง 1.4 มิลลิเมตร และยาว 1.8 มิลลิเมตร จงหาขนาดของมุมที่เกิดจากเส้นทางการเคลื่อนที่ของหยดเลือดทำกับพื้น

42 หอไอเฟลสูง 324 เมตร และมีจุดปลายฐานทั้งสี่ประกอบกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่มีด้านยาวด้านละ 125 เมตร ดังรูป ถ้าปรีชาสูง 180 เซนติเมตร ยืนอยู่ที่ปลายฐานของหอไอเฟล ปรีชาจะมองเห็นยอดหอไอเฟลด้วยมุมเงยกี่องศา



เสริมสมอง : หอไอเฟล

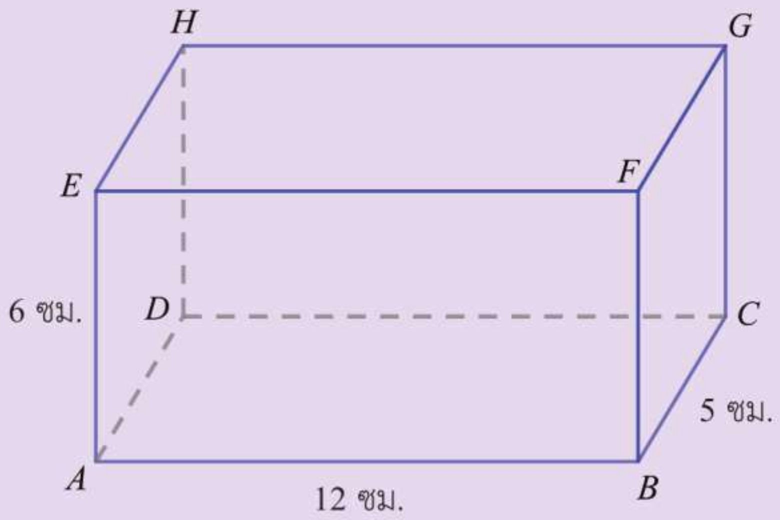


หอไอเฟล (Tour Eiffel) เป็นหอคอยโครงสร้างเหล็ก สูง 324 เมตร ตั้งอยู่ในกรุงปารีส ประเทศฝรั่งเศส ใช้เวลาในการสร้างมากกว่าสองปี โดย Gustave Eiffel วิศวกรและสถาปนิกชาวฝรั่งเศส โดยสร้างสำหรับงานแสดงนิทรรศการนานาชาติของปารีส ใน ค.ศ. 1889 (exposition universelle de 1889) เพื่อฉลองการครบรอบ 100 ปี ของการปฏิวัติฝรั่งเศส ปัจจุบันหอไอเฟลถือได้ว่าเป็นสัญลักษณ์ของประเทศฝรั่งเศส โดยมีผู้เข้าชมเกือบ 7 ล้านคนต่อปี

43 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วรูปหนึ่งมีด้านที่เท่ากันยาวด้านละ 4 นิ้ว และมุมยอดมีขนาด θ องศา จงหา

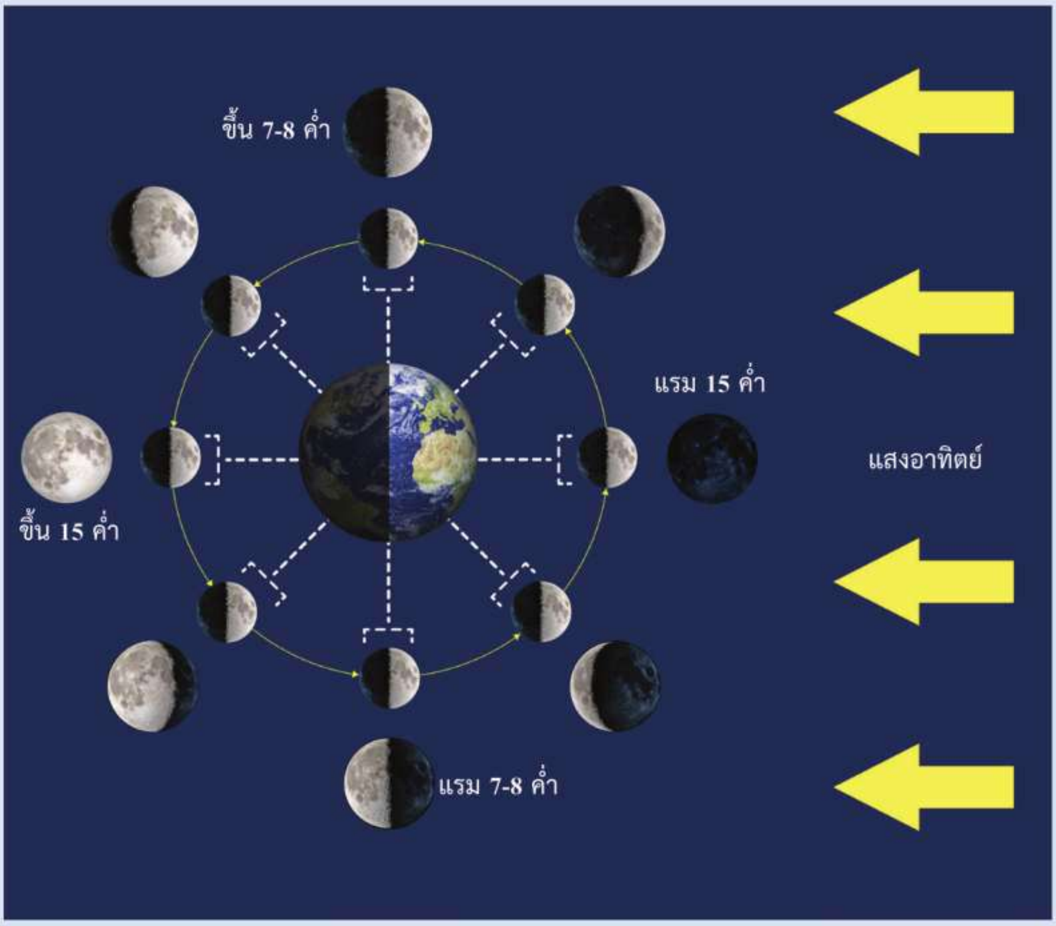
1) ความสูงของรูปสามเหลี่ยมนี้
2) ความยาวฐานของรูปสามเหลี่ยมนี้
3) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

44 จากกล่องซึ่งกำหนดให้ดังรูป



จงหาขนาดของมุม ACE มุม HDF และมุม ECH

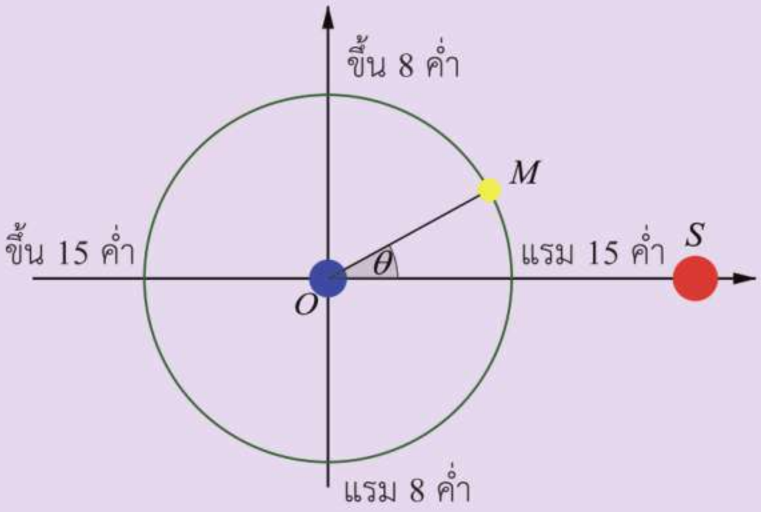
เสริมสมอง : ข้างขึ้นข้างแรม



ข้างขึ้นข้างแรม หรือดิถีจันทร์ (phases of the moon) คือ ปรากฏการณ์ที่เห็นดวงจันทร์มีเสี้ยวสว่างแตกต่างกัน เกิดจากการที่ดวงจันทร์ได้รับแสงจากดวงอาทิตย์และโคจรรอบโลก ทำให้คนบนโลกมองเห็นส่วนสว่างของดวงจันทร์แตกต่างกันไปในแต่ละคืน โดยดวงจันทร์ใช้เวลาโคจรรอบโลกประมาณ 29.5 วัน วันที่ดวงจันทร์สว่างเต็มดวง เรียกว่า วันขึ้น 15 ค่ำ หรือจันทร์เพ็ญ ซึ่งเป็นวันที่ดวงจันทร์โคจรมาอยู่ด้านตรงข้ามกับดวงอาทิตย์ ช่วงที่ส่วนสว่างค่อย ๆ ลดลงจนกระทั่งมืดทั้งดวง เรียกว่า ข้างแรม วันที่ดวงจันทร์มืดทั้งดวง เรียกว่า วันแรม 15 ค่ำ หรือจันทร์ดับ ซึ่งเป็นวันที่ดวงจันทร์อยู่ระหว่างโลกกับดวงอาทิตย์ และช่วงที่ดวงจันทร์ค่อย ๆ สว่างจนเต็มดวงอีกครั้ง เรียกว่า ข้างขึ้น

45 สมมติให้วงโคจรของดวงจันทร์ที่โคจรรอบโลกเป็นวงกลม โดยโลก ดวงจันทร์ และดวงอาทิตย์อยู่ในระนาบเดียวกัน และกำหนดให้โลกอยู่ที่จุดกำเนิด ดวงจันทร์อยู่ที่จุด M ดวงอาทิตย์อยู่ที่จุด S และ θ แทนขนาดของมุม MOS ซึ่งเกิดจากโลกเป็นจุดหมุน จะสามารถจำลองการเกิดปรากฏการณ์ข้างขึ้นข้างแรมได้ดังรูป และสามารถดูภาพเคลื่อนไหวของภาพจำลองปรากฏการณ์ข้างขึ้นข้างแรมได้ที่

ipst.me/8453



โดยที่

เมื่อ $\theta = 0^\circ$ จะเป็นวันแรม 15 ค่ำ

เมื่อ $0^\circ < \theta < 180^\circ$ จะเป็นข้างขึ้น โดยเมื่อ $\theta = 90^\circ$ จะเป็นวันขึ้น 8 ค่ำ

เมื่อ $\theta = 180^\circ$ จะเป็นวันขึ้น 15 ค่ำ

เมื่อ $180^\circ < \theta < 360^\circ$ จะเป็นข้างแรม โดยเมื่อ $\theta = 270^\circ$ จะเป็นวันแรม 8 ค่ำ

ถ้า $f(\theta) = 50(1-\cos\theta)$ เป็นฟังก์ชันแสดงร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ เมื่อ $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$

จงเขียนกราฟของ f พร้อมทั้งหา

1) เรนจ์ของ f
2) ร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้ ในวันแรม 15 ค่ำ วันขึ้น 8 ค่ำ วันขึ้น 15 ค่ำ และวันแรม 8 ค่ำ
3) θ ในวันที่ดวงจันทร์มีลักษณะเป็นเสี้ยวที่มีร้อยละของพื้นที่ภาพของดวงจันทร์ที่สามารถมองเห็นได้เป็น 25

บทที่ 2 | เมทริกซ์

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จุดมุ่งหมาย

1. หาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
2. หาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริง
3. หาผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์
4. หาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน
5. หาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3
6. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2
7. แก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว
8. ใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ในการแก้ปัญหา

บทที่ 2

เมทริกซ์

“

ในปัจจุบัน มีการใช้งานโปรแกรมค้นหา (search engine) อย่างแพร่หลายทั่วโลก เพื่อสืบค้นข้อมูลบนอินเทอร์เน็ต ไม่ว่าจะเป็นข้อความ รูปภาพ วีดิทัศน์ ข่าวสาร และอื่น ๆ ขั้นตอนวิธีหนึ่งที่อยู่เบื้องหลังการแสดงผลการค้นหาของโปรแกรมค้นหาซึ่งเป็นที่รู้จักและมีประสิทธิภาพ คือ PageRank ที่ใช้โดย Google โดยสามารถจัดอันดับความสำคัญของเว็บเพจต่าง ๆ เพื่อแสดงผลการค้นหาที่มีความสัมพันธ์กับสิ่งที่สืบค้นมากที่สุด ขั้นตอนวิธีนี้พัฒนาขึ้นจากความรู้ทางคณิตศาสตร์หลายด้าน และใช้เมทริกซ์เป็นพื้นฐานในการคำนวณ นอกจากเมทริกซ์จะเป็นพื้นฐานในการคำนวณที่ใช้ในโปรแกรมค้นหาข้างต้นแล้ว ความรู้เรื่องเมทริกซ์ยังได้นำมาใช้ในการจัดการข้อมูลและการคำนวณในเรื่องอื่น ๆ อีกมากมาย เช่น ด้านการแพทย์ ได้ใช้เมทริกซ์ในเทคโนโลยีการฉายภาพทางการแพทย์ ในคอมพิวเตอร์กราฟิก ได้ใช้เมทริกซ์ในการฉายภาพวัตถุลงบนระนาบ ทำให้ได้ภาพเคลื่อนไหวที่สมจริง ในวิทยาการหุ่นยนต์ ได้ใช้เมทริกซ์เป็นพื้นฐานในการออกแบบการเคลื่อนที่ของหุ่นยนต์ ในวิชาฟิสิกส์ ได้ใช้เมทริกซ์ในการศึกษาการหมุนของวัตถุแข็งเกร็ง

”

ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับระบบสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปร ในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ipst.me/8456

2.1 เมทริกซ์

ในปัจจุบัน ชีวิตของมนุษย์เกี่ยวข้องกับข้อมูลจำนวนมาก วิธีหนึ่งในการนำเสนอข้อมูลและจัดการข้อมูล คือ การใช้ตาราง เช่น ในการประเมินผลการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำนวน 200 คน ประกอบด้วยคะแนนสอบย่อย คะแนนสอบกลางภาค คะแนนสอบปลายภาค คะแนนการบ้าน และคะแนนการทำรายงาน การจัดการข้อมูลคะแนนของนักเรียนทั้งสองร้อยคนนี้จะสะดวกขึ้น ถ้ากรอกข้อมูลลงในตารางดังนี้

การประเมินผลการเรียนรู้ / ชื่อ	คะแนนสอบย่อย	คะแนนสอบกลางภาค	คะแนนสอบปลายภาค	คะแนนการบ้าน	คะแนนการทำรายงาน
นักเรียน 1					
นักเรียน 2					
⋮					
นักเรียน 200					

ในทางคณิตศาสตร์จะนำชุดข้อมูลที่อยู่ในรูปตารางมาเขียนภายใต้วงเล็บ ( ) หรือ [ ] (ในที่นี้จะใช้ [ ]) ซึ่งเรียกว่า เมทริกซ์

บทนิยาม 1

ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ชุดของจำนวนจริง mn จำนวน ซึ่งเขียนเรียงกันในรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า **เมทริกซ์ (matrix)** ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวนอน เรียกว่า **แถว (row)** ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด m แถว ชุดของสมาชิกที่เขียนในแนวตั้ง เรียกว่า **หลัก (column)** ของเมทริกซ์ ซึ่งมีทั้งหมด n หลัก เรียก a_{ij} ว่าเป็น **สมาชิก (entry)** ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ ถ้าเมทริกซ์มี m แถว n หลัก จะเรียก $m \times n$ ว่า **ขนาด (size)** หรือ **มิติ (dimension)** ของเมทริกซ์

พิจารณาตารางแสดงผลการแข่งขันฟุตบอลของโรงเรียน 4 โรงเรียน ดังนี้

ผลการแข่งขัน / โรงเรียน	ชนะ	เสมอ	แพ้	ประตูได้	ประตูเสีย	คะแนน
โรงเรียน ก	2	1	0	7	2	7
โรงเรียน ข	1	2	0	4	2	5
โรงเรียน ค	1	1	1	5	6	4
โรงเรียน ง	0	0	3	2	8	0

สามารถนำข้อมูลจากตารางมาเขียนในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มี 4 แถว 6 หลัก หรือมีขนาด 4×6

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ซึ่งมี m แถว n หลัก จะเรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ บางครั้งจะเขียนแสดงเมทริกซ์ A ด้วย $\left[a_{ij}\right]_{m \times n}$

ตัวอย่างเช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3 ซึ่งมี

1 เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 1
2 เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 2
3 เป็นสมาชิกในแถวที่ 1 หลักที่ 3
4 เป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 1
5 เป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 2
6 เป็นสมาชิกในแถวที่ 2 หลักที่ 3

$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \sqrt{3} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×3

$[20]$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1

$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 70 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×1

เพื่อความสะดวกในการกล่าวถึงเมทริกซ์ จะแทนเมทริกซ์ด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C

กำหนดให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ ที่มี a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ถ้า $B = \left[b_{ij}\right]_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ สมาชิกของเมทริกซ์ B คือ $b_{11} = 1, b_{12} = 2, b_{21} = 3$ และ $b_{22} = -1$

เสริมสมอง : Sylvester และ Cayley


James Joseph Sylvester


Arthur Cayley

James Joseph Sylvester (ค.ศ. 1814 – 1897) นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ เป็นผู้ที่นำคำว่า เมทริกซ์ มาใช้เป็นครั้งแรก โดยใช้ในการเรียกกลุ่มของพจน์ที่นำมาจัดเรียงกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ทั้งนี้ Sylvester และ Arthur Cayley (ค.ศ. 1821 – 1895) เพื่อนของเขาเป็นผู้ที่มีบทบาทสำคัญในการพัฒนาทฤษฎีเมทริกซ์

การเท่ากันและพีชคณิตของเมทริกซ์

ต่อไปจะกล่าวถึงการเท่ากันของเมทริกซ์และพีชคณิตของเมทริกซ์ ซึ่งได้แก่ การบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง และการคูณเมทริกซ์ ดังนี้

บทนิยาม 2 การเท่ากันของเมทริกซ์

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{p \times q}$

A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $m = p, n = q$ และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

เขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย $A = B$

จากบทนิยามข้างต้น ถ้าเมทริกซ์ A และ B มีขนาดต่างกัน จะได้ว่า A ไม่เท่ากับ B และถ้าเมทริกซ์ A และ B มีขนาดเท่ากันแต่มีสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต่างกันอย่างน้อยหนึ่งคู่ จะได้ว่า A ไม่เท่ากับ B ซึ่งเขียนแทนด้วย $A \neq B$ เช่น $\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 3 การบวกเมทริกซ์

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน
ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คือ เมทริกซ์ $\left[c_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$
เขียนแทน A บวก B ด้วย $A + B$ นั่นคือ $\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 1

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา $A + B$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+2 & 3-3 & 0+1 \\ -1+0 & -4+5 & 2-1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

จากสมบัติการสลับที่ของการบวกของจำนวนจริง จะได้ว่า $A+B=B+A$

บทนิยาม 4 การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นจำนวนจริง
ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ $\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมื่อ $b_{ij}=ca_{ij}$ สำหรับทุก $i\in\{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j\in\{1, 2, 3, \dots, n\}$
เขียนแทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA นั่นคือ $c\left[a_{ij}\right]_{m\times n}=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$

ตัวอย่างที่ 2

ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ จงหา $-3A$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}-3A &= -3\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-3(2) & -3(-1)\\ -3(1) & -3(0)\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-6 & 3\\ -3 & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 3

ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}$ จงหา $A+2B$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}A+2B &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 3\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 2 & 4\\ -4 & -2 & 6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1-2 & 1+2 & 0+4\\ 2-4 & -1-2 & 3+6\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}-1 & 3 & 4\\ -2 & -3 & 9\end{bmatrix}\end{aligned}$$

■

หมายเหตุ จะเขียนแทนผลคูณของเมทริกซ์ A กับ -1 ด้วย $-A$ นั่นคือ $-A=(-1)A$

บทนิยาม 5 การลบเมทริกซ์

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน

เมทริกซ์ A ลบด้วยเมทริกซ์ B คือ ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $-B$

เขียนแทนด้วย $A-B$ นั่นคือ $A-B=A+(-B)$

ตัวอย่างที่ 4

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $3A - 4B$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
3A - 4B &= 3\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -8 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3-4 & 0-4 \\ 6-8 & 3+4 \\ 9+0 & 9-8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -7 & -4 \\ -2 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

■

บทนิยาม 6

เมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า **เมทริกซ์ศูนย์** เขียนแทนด้วย $\underline{0}_{m\times n}$ หรือ $\underline{0}$

การบวกเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง มีสมบัติดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ A, B, C และ $\underline{0}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$
4. $A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}$
5. $c(A + B) = cA + cB$
6. $(c + d)A = cA + dA$
7. $(cd)A = c(dA)$
8. $1A = A$
9. $0A = \underline{0}$

จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 3 จะเรียก $\underline{0}$ ว่า **เอกลักษณ์การบวก** ในเซตของเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และจากทฤษฎีบท 1 ข้อ 4 จะเรียก $-A$ ว่า **ตัวผกผันการบวก** หรือ **อินเวอร์สการบวก** ของ A

นอกจากนี้ จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 2 ทำให้สามารถแทน $A + (B + C)$ และ $(A + B) + C$ ด้วย $A + B + C$ โดยไม่เกิดความสับสน

ตัวอย่างที่ 5

พลังงานและปริมาณสารอาหารที่ได้รับจากอาหารแต่ละอย่างของร้านอาหารแห่งหนึ่งแสดงได้ดังตารางต่อไปนี้

	พลังงาน (กิโลแคลอรี)	ไขมัน (กรัม)	โซเดียม (มิลลิกรัม)
ข้าวผัดกุ้ง 1 จาน	595	7	1,100
หมูทอด 1 ชิ้น	170	11	250
ลอดช่อง 1 ถ้วย	210	2	20

ถ้ารับประทานข้าวผัดกุ้ง 1 จาน หมูทอด 3 ชิ้น และลอดช่อง 2 ถ้วย จะได้รับพลังงาน ไขมัน และโซเดียมอย่างละเท่าใด

วิธีทำ นำข้อมูลจากตารางมาเขียนในรูปเมทริกซ์ขนาด 1×3 ได้ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 595 & 7 & 1{,}100 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 170 & 11 & 250 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 210 & 2 & 20 \end{bmatrix}$$

เมื่อ A, B และ C เป็นเมทริกซ์แสดงพลังงานและปริมาณสารอาหารที่ได้รับจากข้าวผัดกุ้ง 1 จาน หมูทอด 1 ชิ้น และลอดช่อง 1 ถ้วย ตามลำดับ โดยสมาชิกในหลักที่ 1 ถึง 3 ของเมทริกซ์แสดงปริมาณพลังงาน ไขมัน และโซเดียมในอาหาร ตามลำดับ

พลังงานและปริมาณสารอาหารที่จะได้รับถ้ารับประทานข้าวผัดกุ้ง 1 จาน หมูทอด 3 ชิ้น และลอดช่อง 2 ถ้วย เขียนในรูปเมทริกซ์ได้เป็น $A+3B+2C$ ซึ่งเท่ากับ

$$\begin{bmatrix} 595 & 7 & 1{,}100 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 170 & 11 & 250 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 210 & 2 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 595 & 7 & 1{,}100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3(170) & 3(11) & 3(250) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2(210) & 2(2) & 2(20) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 595+3(170)+2(210) & 7+3(11)+2(2) & 1{,}100+3(250)+2(20) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}525 & 44 & 1{,}890 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ถ้ารับประทานข้าวผัดกุ้ง 1 จาน หมูทอด 3 ชิ้น และลอดช่อง 2 ถ้วย จะได้รับพลังงาน 1,525 กิโลแคลอรี ไขมัน 44 กรัม และโซเดียม 1,890 มิลลิกรัม ■

ตัวอย่างที่ 6

ร้านขายเสื้อแห่งหนึ่งใช้เมทริกซ์ขนาด 2×3 แสดงข้อมูลจำนวนเสื้อคงเหลือ โดยกำหนดให้สมาชิกในแถวที่ 1 และ 2 แสดงจำนวนเสื้อสีฟ้าและสีม่วง ตามลำดับ ส่วนสมาชิกในหลักที่ 1 ถึง 3 แสดงจำนวนเสื้อขนาด S, M และ L ตามลำดับ ถ้าเมทริกซ์ A แสดงจำนวนเสื้อเริ่มต้น และเมทริกซ์ B แสดงจำนวนเสื้อที่ขายได้ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 10 \\ 20 & 15 & 14 \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 8 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาว่าจะต้องสั่งซื้อเสื้อแต่ละสีและแต่ละขนาดจำนวนอย่างละเท่าใด เพื่อให้คงเหลือเสื้อแต่ละสีและแต่ละขนาดอย่างน้อย 10 ตัว

วิธีทำ จำนวนเสื้อคงเหลือหาได้จาก

$$\begin{aligned} A-B &= \begin{bmatrix} 12-7 & 18-5 & 10-6 \\ 20-8 & 15-11 & 14-4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 13 & 4 \\ 12 & 4 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

จากเมทริกซ์ $A-B$ พบว่า เหลือเสื้อสีฟ้าขนาด S จำนวน 5 ตัว เสื้อสีฟ้าขนาด L จำนวน 4 ตัว และเสื้อสีม่วงขนาด M จำนวน 4 ตัว

ดังนั้น จะต้องสั่งซื้อเสื้อสีฟ้าขนาด S จำนวน 5 ตัว เสื้อสีฟ้าขนาด L จำนวน 6 ตัว และเสื้อสีม่วงขนาด M จำนวน 6 ตัว เพื่อให้คงเหลือเสื้อแต่ละสีและแต่ละขนาดอย่างน้อย 10 ตัว

■

บทนิยาม 7 การคูณเมทริกซ์

ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times q}$

ผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB จะนิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ และเมทริกซ์ผลคูณ AB จะมีขนาด $m\times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \ldots, q\}$

จะเห็นว่าสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ AB ได้มาจากการบวกผลคูณของสมาชิกในแถวที่ i ของ A กับสมาชิกในหลักที่ j ของ B โดยคูณสมาชิกตัวต่อตัวตามลำดับของสมาชิก

ตัวอย่างที่ 7

ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่าผลคูณ AB และ BA นิยามได้หรือไม่ ถ้านิยามได้ จงหาเมทริกซ์ผลคูณ

วิธีทำ เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×1

ดังนั้น BA ไม่นิยาม

แต่ AB นิยามได้ และเป็นเมทริกซ์ขนาด 2×1

จะได้ $AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(1)+1(-1)\\0(1)+3(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$ ■

ตัวอย่างที่ 8

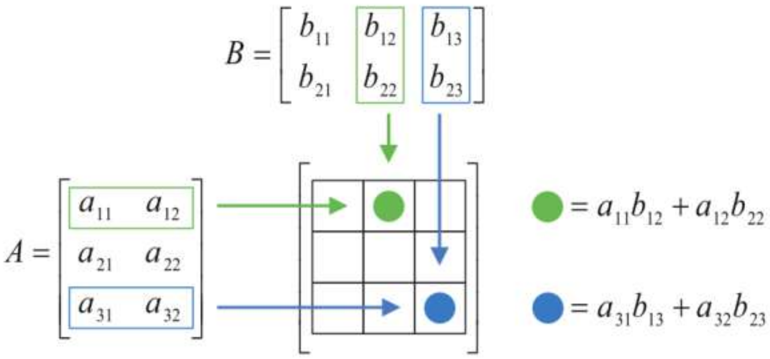
ให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 2\\-2 & 0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\0 & -2 & 3\end{bmatrix}$ จงหา

1) AB 2) BA

วิธีทำ 1) เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×2 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3

ดังนั้น AB เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3

ในการหาสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ AB จะนำสมาชิกในแถวที่ i ของเมทริกซ์ A มาคูณตัวต่อตัวกับสมาชิกในหลักที่ j ของเมทริกซ์ B แล้วนำผลคูณที่ได้มาบวกกัน ดังรูป



จะได้ $AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} (-1)(2)+1(0) & (-1)(1)+1(-2) & (-1)(-1)+1(3) \\ 0(2)+2(0) & 0(1)+2(-2) & 0(-1)+2(3) \\ (-2)(2)+0(0) & (-2)(1)+0(-2) & (-2)(-1)+0(3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

2) เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×2 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×3 ดังนั้น BA เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2

จะได้ $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 2(-1)+1(0)+(-1)(-2) & 2(1)+1(2)+(-1)(0) \\ 0(-1)+(-2)(0)+3(-2) & 0(1)+(-2)(2)+3(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$$ ■

จากตัวอย่างที่ 8 จะเห็นว่าสามารถหาทั้ง AB และ BA ได้ แต่ AB และ BA มีขนาดไม่เท่ากัน ดังนั้น $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 9

ให้ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$ จงหา

1) AB

2) BA

วิธีทำ 1) เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×1
ดังนั้น AB เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×1

$$\text{จะได้ } AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \end{bmatrix}$$

2) เนื่องจาก A เป็นเมทริกซ์ขนาด 1×3 และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×1
ดังนั้น BA เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3

$$\text{จะได้ } BA = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} & b_{11}a_{13} \\ b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} & b_{21}a_{13} \\ b_{31}a_{11} & b_{31}a_{12} & b_{31}a_{13} \end{bmatrix}$$

■

ตัวอย่างที่ 10

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา AB และ BA

วิธีทำ

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)+0(4) & 1(-3)+0(5) \\ 2(1)+1(4) & 2(-3)+1(5) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \\ BA &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1(1)-3(2) & 1(0)-3(1) \\ 4(1)+5(2) & 4(0)+5(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 14 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

จากตัวอย่างที่ 10 จะเห็นว่า AB และ BA มีขนาดเท่ากัน แต่ $AB \neq BA$

ตัวอย่างที่ 11

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา AB

วิธีทำ $AB = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)-1(1) & 1(3)-1(3) \\ -1(1)+1(1) & -1(3)+1(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ■

นักเรียนเคยทราบมาแล้วว่า เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ แต่จากตัวอย่างที่ 11 จะเห็นว่า $AB = \underline{0}$ โดยที่ $A \neq \underline{0}$ และ $B \neq \underline{0}$

ตัวอย่างที่ 12

ในการแข่งขันฟุตบอลไทยลีก ฤดูกาล 2561 มีสโมสรเข้าร่วมการแข่งขันทั้งหมด 18 สโมสร โดยผลการแข่งขันของสโมสรที่ได้คะแนนสูงสุด 5 อันดับแรก หลังจากจบการแข่งขันนัดที่ 17 แสดงได้ดังตาราง

อันดับ	สโมสร	ชนะ	เสมอ	แพ้
1	บุรีรัมย์ ยูไนเต็ด	13	2	2
2	ทรู แบงค็อก ยูไนเต็ด	12	3	2
3	การท่าเรือ เอฟซี	11	1	5
4	เอสซีจี เมืองทอง ยูไนเต็ด	8	6	3
5	พีที ประจวบ เอฟซี	9	2	6

ถ้าในการแข่งขันแต่ละนัด สโมสรที่ชนะได้ 3 คะแนน สโมสรที่เสมอได้ 1 คะแนน และสโมสรที่แพ้ได้ 0 คะแนน จงหาคะแนนรวมที่แต่ละสโมสรทำได้หลังจากจบการแข่งขันนัดที่ 17

วิธีทำ ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×3 แสดงข้อมูลจากตารางแสดงผลการแข่งขันของสโมสรที่ได้คะแนนสูงสุด 5 อันดับแรก หลังจากจบการแข่งขันนัดที่ 17

จะได้ $A=\begin{bmatrix}13&2&2\\12&3&2\\11&1&5\\8&6&3\\9&2&6\end{bmatrix}$

ให้ $B=\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงคะแนนที่ชนะ เสมอ และแพ้

จะได้ $AB=\begin{bmatrix}13&2&2\\12&3&2\\11&1&5\\8&6&3\\9&2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13(3)+2(1)+2(0)\\12(3)+3(1)+2(0)\\11(3)+1(1)+5(0)\\8(3)+6(1)+3(0)\\9(3)+2(1)+6(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}41\\39\\34\\30\\29\end{bmatrix}$

เป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกในแต่ละแถวแสดงคะแนนรวมของแต่ละสโมสร

ดังนั้น คะแนนรวมที่แต่ละสโมสรทำได้ หลังจากจบการแข่งขันนัดที่ 17 แสดงได้ดังตาราง

อันดับ	ทีม	ชนะ	เสมอ	แพ้	คะแนนรวม
1	บุรีรัมย์ ยูไนเต็ด	13	2	2	41
2	ทรู แบงค็อก ยูไนเต็ด	12	3	2	39
3	การท่าเรือ เอฟซี	11	1	5	34
4	เอสซีจี เมืองทอง ยูไนเต็ด	8	6	3	30
5	พีที ประจวบ เอฟซี	9	2	6	29

ตัวอย่างที่ 13

บริษัทผลิตสีทาบ้านแจ่มจริงมีสูตรในการผสมสีขาว สีแดง สีเหลือง และสีน้ำเงิน ให้เป็นสีเขียวกะหล่ำปลี สีม่วงเปลือกมังคุด และสีเหลืองกล้วยหอม ดังตารางแสดงร้อยละของส่วนผสมต่อไปนี้

สีที่ได้ / ร้อยละของส่วนผสม	สีเขียวกะหล่ำปลี	สีม่วงเปลือกมังคุด	สีเหลืองกล้วยหอม
สีขาว	80	72	86
สีแดง	0	14	0
สีเหลือง	10	0	14
สีน้ำเงิน	10	14	0

1) ถ้าบริษัทต้องการผลิตสีเขียวกะหล่ำปลี 160 ลิตร สีม่วงเปลือกมังคุด 200 ลิตร และสีเหลืองกล้วยหอม 100 ลิตร จะต้องใช้สีขาว สีแดง สีเหลือง และสีน้ำเงิน อย่างละเท่าใด
2) ถ้าบริษัทต้องการผลิตสีเขียวกะหล่ำปลี 220 ลิตร สีม่วงเปลือกมังคุด 150 ลิตร และสีเหลืองกล้วยหอม 180 ลิตร จะต้องใช้สีขาว สีแดง สีเหลือง และสีน้ำเงิน อย่างละเท่าใด

วิธีทำ 1) ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×3 แสดงข้อมูลจากตารางแสดงร้อยละของส่วนผสม

จะได้ $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.72 & 0.86 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.14 \\ 0.1 & 0.14 & 0 \end{bmatrix}$

ให้ $B = \begin{bmatrix} 160 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงปริมาณของสีทาบ้านแต่ละสีที่ต้องการผลิต

$$AB = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.72 & 0.86 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.14 \\ 0.1 & 0.14 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 160 \\ 200 \\ 100 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8(160)+0.72(200)+0.86(100) \\ 0(160)+0.14(200)+0(100) \\ 0.1(160)+0(200)+0.14(100) \\ 0.1(160)+0.14(200)+0(100) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 358 \\ 28 \\ 30 \\ 44 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ถ้าบริษัทต้องการผลิตสีเขียวกะหล่ำปลี 160 ลิตร สีม่วงเปลือกมังคุด 200 ลิตร และสีเหลืองกล้วยหอม 100 ลิตร จะต้องใช้สีขาว 358 ลิตร สีแดง 28 ลิตร สีเหลือง 30 ลิตร และสีน้ำเงิน 44 ลิตร

2) ให้ $C = \begin{bmatrix} 220 \\ 150 \\ 180 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์แสดงปริมาณของสีทาบ้านแต่ละสีที่ต้องการผลิต

$$AC = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.72 & 0.86 \\ 0 & 0.14 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.14 \\ 0.1 & 0.14 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 220 \\ 150 \\ 180 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.8(220)+0.72(150)+0.86(180) \\ 0(220)+0.14(150)+0(180) \\ 0.1(220)+0(150)+0.14(180) \\ 0.1(220)+0.14(150)+0(180) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 438.8 \\ 21 \\ 47.2 \\ 43 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น ถ้าบริษัทต้องการผลิตสีเขียวกะหล่ำปลี 220 ลิตร สีม่วงเปลือกมังคุด 150 ลิตร และสีเหลืองกล้วยหอม 180 ลิตร จะต้องใช้สีขาว 438.8 ลิตร สีแดง 21 ลิตร สีเหลือง 47.2 ลิตร และสีน้ำเงิน 43 ลิตร ■

บทนิยาม 8

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ I_n เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ i เป็น 1 สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น 0 เมื่อ $i \neq j$ เรียก I_n ว่า **เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)** ขนาด $n \times n$

ตัวอย่างของเมทริกซ์เอกลักษณ์

$$I_1 = [1],\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้าไม่เกิดความสับสนเกี่ยวกับขนาดของเมทริกซ์แล้ว อาจเขียน I แทน I_n

ตัวอย่างที่ 14

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $I_2A = AI_2 = A$

วิธีทำ

$$I_2A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1(a)+0(c) & 1(b)+0(d)\\0(a)+1(c) & 0(b)+1(d)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$= A$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a(1)+b(0) & a(0)+b(1)\\c(1)+d(0) & c(0)+d(1)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$$

$$= A$$

■

ในกรณีทั่วไป ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ แล้ว $I_nA = AI_n = A$

สมบัติของเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการคูณมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ และ $C=\left[c_{ij}\right]_{p\times q}$ จะได้ว่า

1. $A(BC)=(AB)C$
2. $\underline{0}_{r\times m}A=\underline{0}_{r\times n}$ และ $A\underline{0}_{n\times r}=\underline{0}_{m\times r}$
3. $I_mA=A$ และ $AI_n=A$
4. $(cA)B=A(cB)=c(AB)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
5. $A(B+D)=AB+AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$
6. $(A+E)B=AB+EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$

จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 1 ทำให้สามารถแทน $A(BC)$ และ $(AB)C$ ด้วย ABC โดยไม่เกิดความสับสน

บทนิยาม 9

เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

สมบัติที่สำคัญของเมทริกซ์จัตุรัส คือ ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ แล้ว จะสามารถหา AB, BA, AA และ BB ได้เสมอ และเมทริกซ์ผลคูณที่ได้จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด $n \times n$ ด้วย ดังนั้น เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะสามารถหาผลคูณของ A จำนวน k ตัว ได้เสมอ และเพื่อความสะดวกจะแทน $\underbrace{AAA\ldots A}_{k \text{ ตัว}}$ ด้วย A^k

ตัวอย่างที่ 15

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) A^2

2) A^3

วิธีทำ 1) $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)(-1)+2(-3) & (-1)(2)+2(1) \\ (-3)(-1)+1(-3) & (-3)(2)+1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

2)
$$\begin{aligned} A^3 &= A^2 A \\ &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-5)(-1)+0(-3) & (-5)(2)+0(1) \\ 0(-1)+(-5)(-3) & 0(2)+(-5)(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 15 & -5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 16

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $(A+B)^2$

2) $A^2 + 2AB + B^2$

วิธีทำ 1)

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(2)+2(5) & 2(2)+2(5) \\ 5(2)+5(5) & 5(2)+5(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 14 \\ 35 & 35 \end{bmatrix}$$

2)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(3) & 1(2)+2(4) \\ 3(1)+4(3) & 3(2)+4(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+2(2) & 1(0)+2(1) \\ 3(1)+4(2) & 3(0)+4(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(1)+0(2) & 1(0)+0(1) \\ 2(1)+1(2) & 2(0)+1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+2(5)+1 & 10+2(2)+0 \\ 15+2(11)+4 & 22+2(4)+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 14 \\ 41 & 31 \end{bmatrix}$$

■

จากตัวอย่างที่ 16 จะเห็นว่า $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

ตัวอย่างที่ 17

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ใด ๆ จงแสดงว่า $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB = BA$

วิธีทำ จากทฤษฎีบท 2 สามารถกระจาย $(A+B)^2$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} (A+B)^2 &= (A+B)(A+B) \\ &= (A+B)A + (A+B)B \\ &= A^2 + BA + AB + B^2 \end{aligned}$$

สมมติว่า $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ดังนั้น $A^2 + BA + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2$

จะได้ $BA = AB$

ในทางกลับกัน สมมติว่า $AB = BA$

จะได้ $(A+B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2$

$= A^2 + AB + AB + B^2$

นั่นคือ $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

ดังนั้น $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ก็ต่อเมื่อ $AB = BA$ ■

เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

บทนิยาม 10

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ถ้า $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix)** ของ A เขียนแทนด้วย A^t

ตัวอย่างที่ 18

ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^t และ B^t

วิธีทำ จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $B^t = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ■

ข้อสังเกต ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A^t จะเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$ ที่มีสมาชิกในแถวที่ i เหมือนกับสมาชิกในหลักที่ i ของ A สำหรับทุก $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

ตัวอย่างที่ 19

ให้ $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $(AB)^t$ และ $B^t A^t$

วิธีทำ

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+0 & -1-2 & 1+3 \\ 0+0 & 0-4 & 0+6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^t = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ $A^t = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $B^tA^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2+0 & 0+0 \\ -1-2 & 0-4 \\ 1+3 & 0+6 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ■

จากตัวอย่างที่ 19 จะเห็นว่า $(AB)^t = B^tA^t$

สมบัติของเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$ เมื่อ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
2. $(AB)^t = B^tA^t$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$
3. $(A^t)^t = A$
4. $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหา x, y และ z ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} 2y-3 & 4 \\ x+y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2z \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2. จงเขียนระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} 3x + y &= 5 \\ -2y &= 3 \end{aligned}$$

เป็นสมการเมทริกซ์ในรูป $xA + yB = C$ เมื่อ x, y เป็นตัวแปร และ A, B, C เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×1

3. ข้อมูลแสดงจำนวนนักเรียนทั้งหมดของโรงเรียนแห่งหนึ่งเขียนเป็นเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 122 & 130 \\ 128 & 124 \\ 115 & 119 \end{bmatrix}$$

โดยแถวที่ 1 ถึง 3 แสดงจำนวนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ถึง 3 ตามลำดับ และหลักที่ 1 ถึง 2 แสดงจำนวนนักเรียนหญิงและชาย ตามลำดับ จงหา

1) จำนวนนักเรียนชายชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2
2) จำนวนนักเรียนหญิงทั้งหมดของโรงเรียนแห่งนี้
3) เมทริกซ์แสดงผลต่างของจำนวนนักเรียนหญิงและชายในแต่ละระดับชั้นของโรงเรียนแห่งนี้

4. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $A + B$ 　　2) $2A - B$ 　　3) $-\frac{2}{3}B$

5. จงหาผลคูณเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\1\\-1\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\-5\end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 6) $\begin{bmatrix}-1 & 5 & 2\\4 & -3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

6. กำหนดเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}3 & -1 & 3\\4 & 1 & 0\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}$ และ

$E=\begin{bmatrix}2 & -4 & 5\\1 & 1 & -1\\2 & 2 & 0\end{bmatrix}$ จงหา

1) $2C-3E$
2) AB และ BA
3) $AB+D^2$
4) $BA-2C^2$
5) A^tB^t+2E
6) $(AB)D$
7) $BA(C+E)$

7. กำหนดเมทริกซ์ $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 2\\1 & 3 & 0\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\0 & 1\\3 & -2\end{bmatrix}$ จงหา

1) ABC
2) $AB+AC^t$
3) A^2-2BC

8. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ จงหา A^2, A^3, A^4 และคาดการณ์ว่า A^n คือ เมทริกซ์ใด เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

9. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ที่บวกกับ A แล้วได้เมทริกซ์ต่อไปนี้
   1) $2A^t$
   2) A^2
   3) $\begin{bmatrix}x & y\\ z & t\end{bmatrix}$ เมื่อ x, y, z และ t เป็นจำนวนจริง

10. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & -2\end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้
   1) $3X - A = A$
   2) $\frac{1}{2}A = 2(2X - A)$

11. ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า
   1) $(A-B)^2 \neq A^2 - 2AB + B^2$
   2) $(A+B)(A-B) \neq A^2 - B^2$

12. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ และ $A=\begin{bmatrix}0 & a & b\\ 0 & 0 & c\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $A^n = \underline{0}$

13. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ x & y\end{bmatrix}$ และ $A^2 = \underline{0}$ จงหา x และ y

14. ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m\times n$, B เป็นเมทริกซ์ขนาด $n\times p$ และ k เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

15. ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2 จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นเท็จ จงยกตัวอย่างค้าน
   1) ถ้า $A^2 = \underline{0}$ แล้ว $A = \underline{0}$
   2) ถ้า $A^2 = I_2$ แล้ว $A = I_2$ หรือ $A = -I_2$
   3) ถ้า $A^2 = A$ แล้ว $A = \underline{0}$ หรือ $A = I_2$
   4) ไม่มีเมทริกซ์ A ซึ่ง $A^2 = -I_2$

16. ยอดขายข้าวแต่ละชนิดของโรงสีรวมใจชาวนาสาขาจังหวัดบุรีรัมย์และจังหวัดเชียงใหม่ (มีหน่วยเป็นตัน) ในเดือนมกราคม 2561 แสดงได้ดังตาราง

โรงสี \ ชนิดของข้าว	ข้าวหอมมะลิ	ข้าวเหนียว	ข้าวขาว
สาขาบุรีรัมย์	20	45	8
สาขาเชียงใหม่	55	10	14

ถ้าโรงสีรวมใจชาวนาตั้งราคาขายข้าวหอมมะลิ ข้าวเหนียว และข้าวขาว ในราคาปกติตันละ 23,000 บาท 25,000 บาท และ 17,000 บาท ตามลำดับ และราคาสมาชิกตันละ 22,000 บาท 23,500 บาท และ 15,000 บาท ตามลำดับ จงหารายรับในเดือนมกราคม 2561 ของโรงสีรวมใจชาวนาแต่ละสาขา ในกรณีที่โรงสีขายข้าวทุกชนิดในราคาปกติ และในกรณีที่โรงสีขายข้าวทุกชนิดในราคาสมาชิก

17. วิรัชและดวงใจเป็นพนักงานขายของศูนย์จำหน่ายรถยนต์แห่งหนึ่ง โดยแต่ละคนมียอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ (มีหน่วยเป็นล้านบาท) ในเดือนตุลาคมและพฤศจิกายน 2561 ดังนี้

ยอดขายรถยนต์ในเดือนตุลาคม 2561		
พนักงาน \ ชนิดของรถ	รถยนต์มือสอง	รถยนต์ใหม่
วิรัช	5	15
ดวงใจ	1.35	0

ยอดขายรถยนต์ในเดือนพฤศจิกายน 2561		
ชนิดของรถ / พนักงาน	รถยนต์มือสอง	รถยนต์ใหม่
วิรัช	7.5	16
ดวงใจ	2.09	8.5

จงหาว่า

1) แต่ละคนมียอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่รวมทั้งสองเดือนเป็นเท่าใด
2) ยอดขายรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ในเดือนพฤศจิกายน 2561 ของแต่ละคนเพิ่มขึ้นจากเดือนตุลาคม 2561 เท่าใด
3) ถ้าวิรัชและดวงใจได้ค่านายหน้า 3% ของยอดขาย ในเดือนพฤศจิกายน 2561 แต่ละคนจะได้ค่านายหน้าสำหรับรถยนต์มือสองและรถยนต์ใหม่ประเภทละเท่าใด

2.2 ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง **ดีเทอร์มิแนนต์ (determinant)** ของเมทริกซ์ โดยเริ่มจากบทนิยามดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังนี้

บทนิยาม 11

ให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $ad-bc$

เขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

พิจารณาแผนภาพต่อไปนี้

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

จากแผนภาพ จะเห็นว่า $\det(A)$ หาได้จากการนำผลคูณของจำนวนตามเส้นทึบในแนวทแยงลบด้วยผลคูณของจำนวนตามเส้นประในแนวทแยง

ตัวอย่างที่ 20

จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1)-0(0) = 1$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1(4)-2(3) = -2$

■

ต่อไปจะนิยามดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 พร้อมทั้งพิจารณาสมบัติที่สำคัญเกี่ยวกับดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ดังนี้

บทนิยาม 12

ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จะได้

$$\det(A)=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

เรียกการหาดีเทอร์มิแนนต์ในบทนิยามนี้ว่า **"การกระจายตามแถวที่ 1"** นอกจากนี้ยังแสดงได้ว่าสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามแถวที่ 2 หรือแถวที่ 3 ได้ดังต่อไปนี้

กระจายตามแถวที่ 2 จะได้

$$\det(A)=(-1)^{2+1}a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+2}a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+(-1)^{2+3}a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

กระจายตามแถวที่ 3 จะได้

$$\det(A)=(-1)^{3+1}a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+2}a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}+(-1)^{3+3}a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

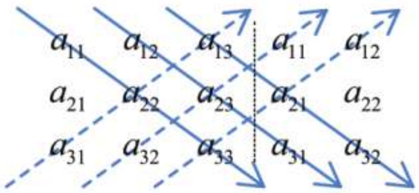
โดยทั้งสามวิธีนี้จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน คือ

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$$

ซึ่งเป็นผลลัพธ์เดียวกับการทำตามขั้นตอนต่อไปนี้

ขั้นตอนที่ 1 เขียนหลักที่ 1 และ 2 ของเมทริกซ์เพิ่มเข้าไปต่อจากหลักที่ 3

ขั้นตอนที่ 2 คำนวณผลคูณของจำนวนตามเส้นในแนวทแยงทั้ง 6 เส้น ในแผนภาพ โดยนำผลคูณของจำนวนตามเส้นทึบในแนวทแยงแต่ละเส้นมาบวกกัน แล้วลบด้วยผลคูณของจำนวนตามเส้นประในแนวทแยงแต่ละเส้น



ตัวอย่างที่ 21

จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1(2)(5)+2(6)(0)+3(0)(0)-0(2)(3)-0(6)(1)-5(0)(2)$

$= 10$

2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(5)(9)+2(6)(7)+3(4)(8)-7(5)(3)-8(6)(1)-9(4)(2)$

$= 45+84+96-105-48-72$

$= 0$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์มีสมบัติดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสที่มีขนาดเท่ากัน และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ จะได้ว่า

1. $\det(I)=1$
2. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการสลับแถวสองแถวของเมทริกซ์ A แล้ว $\det(B)=-\det(A)$
3. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ A ด้วยค่าคงตัว c แล้ว $\det(B)=c\det(A)$
4. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวใดแถวหนึ่งของเมทริกซ์ A ด้วยค่าคงตัว c แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวที่อยู่ในหลักเดียวกันในอีกแถวหนึ่ง แล้ว $\det(B)=\det(A)$
5. ถ้าเมทริกซ์ A มีแถว 2 แถว ที่เหมือนกัน แล้ว $\det(A)=0$
6. $\det(A^t)=\det(A)$
7. $\det(AB)=\det(A)\det(B)$
8. $\det(A^n)=(\det(A))^n$

หมายเหตุ เนื่องจาก $\det(A^t)=\det(A)$ ดังนั้น จากบทนิยาม 12 จะเห็นว่าสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์โดยการกระจายตามหลักได้ด้วย นอกจากนี้ ทฤษฎีบท 4 ข้อ 2 – 5 ยังคงเป็นจริงเมื่อเปลี่ยนคำว่า “แถว” เป็น “หลัก”

ทฤษฎีบท 4 ช่วยให้สามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ได้สะดวกขึ้น ดังนี้

ตัวอย่างที่ 22

จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -1 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 3)

$= 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 3)

$= 2(0)$ (จากทฤษฎีบท 4 ข้อ 5)

$= 0$

ตัวอย่างที่ 23

จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 11 \end{vmatrix}$ (เนื่องจากเมทริกซ์ใหม่เกิดจากการคูณสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 1 ด้วย -2 แล้วนำไปบวกกับสมาชิกแต่ละตัวในแถวที่ 2)

$= (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ (จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 2)

$= -(1(7)-2(3))$

$= -1$

ตัวอย่างที่ 24

จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2}(3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$$ (จากบทนิยาม 12 โดยการกระจายตามแถวที่ 2)

$$= 3(1(4)-3(0))$$

$$= 12$$

■

ตัวอย่างที่ 25

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^4)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2)-1(1) = 3$

จะได้ $\det(A^4) = (\det(A))^4 = 3^4 = 81$

■

ตัวอย่างที่ 26

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^5)$

วิธีทำ โดยการกระจายตามหลักที่ 1 จะได้ว่า

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}(2)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(-2(1)-1(-1)) = -2$$

ดังนั้น $\det(A^5) = (\det(A))^5 = (-2)^5 = -32$

■

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

7) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$

8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 3 \end{bmatrix}$

9) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \\ -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

10) $\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^t)$, $\det(A^5)$, $\det(B^t)$ และ $\det(B^6)$

2.3 เมทริกซ์ผกผัน

นักเรียนได้ศึกษามาแล้วว่า ในระบบจำนวนจริง ทุกจำนวนจริง x ที่ไม่เป็นศูนย์ จะมีจำนวนจริง $\frac{1}{x}$ ซึ่ง $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$

เรียก $\frac{1}{x}$ ว่าตัวผกผันการคูณของ x นั่นคือ $x^{-1} = \frac{1}{x}$

ในทำนองเดียวกันสามารถนิยามตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ได้ดังนี้

บทนิยาม 13

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ถ้ามีเมทริกซ์ B ขนาด $n \times n$ ซึ่ง

$$AB = BA = I_n$$

แล้วจะเรียก B ว่า **เมทริกซ์ผกผัน** หรือ **ตัวผกผันการคูณ** หรือ **อินเวอร์สการคูณ** ของเมทริกซ์ A และเขียนแทนด้วย A^{-1}

ทฤษฎีบท 5

ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผัน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมติให้ B และ C เป็นเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A

จะได้ $AB = BA = I_n$ และ $AC = CA = I_n$

จากทฤษฎีบท 2 ข้อ 1 จะได้

$$\begin{aligned} B(AC) &= (BA)C \\ BI_n &= I_nC \\ B &= C \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผัน แล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2

ในหัวข้อนี้จะหาสูตรของเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ดังนี้

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$

จะได้

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= (ad-bc)I_2 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+ad \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} \\ &= (ad-bc)I_2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $AB = BA = (ad-bc)I_2$

ถ้าให้ $C = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

จะได้ $AC = CA = I_2$

ดังนั้น $C = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

ทฤษฎีบท 6

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $ad-bc \neq 0$

ข้อสังเกต $ad-bc$ เป็นดีเทอร์มิแนนต์ของ A นั่นคือ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

เมื่อ $\det(A) \neq 0$

ถ้า $\det(A) = 0$ แล้วเมทริกซ์ A จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ตัวอย่างที่ 27

จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$

วิธีทำ 1) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $(-1)(0)-1(1) = -1$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $0(3)-1(2) = -2$ ซึ่งไม่เท่ากับ 0

ดังนั้น เมทริกซ์นี้มีเมทริกซ์ผกผัน คือ $\frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) เนื่องจากดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์นี้เท่ากับ $(-1)(-6)-2(3) = 0$

ดังนั้น เมทริกซ์นี้จึงไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ■

ตัวอย่างที่ 28

จงแสดงว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่ง $A^2 = A$ และ $A \neq I$ แล้ว A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

วิธีทำ ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่ง $A^2 = A$ และ $A \neq I$

สมมติว่า A มีเมทริกซ์ผกผัน

จะได้ $A^{-1}A^2 = A^{-1}A$

พิจารณา $A^{-1}A^2$ จะได้ $A^{-1}AA = \left(A^{-1}A\right)A = IA = A$

พิจารณา $A^{-1}A$ จะได้ $A^{-1}A = I$

นั่นคือ $A = I$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐานว่า $A \neq I$

ดังนั้น A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน ■

ตัวอย่างที่ 29

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสซึ่งมีเมทริกซ์ผกผัน จงแสดงว่าผลคูณ AB มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\left(B^{-1}A^{-1}\right)(AB) = B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

และ $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right) = A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

แสดงว่า AB มีเมทริกซ์ผกผัน และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ■

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

2. จงแสดงว่าสำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A ถ้ามีเมทริกซ์จัตุรัส $B \neq \underline{0}$ ซึ่ง $AB = \underline{0}$ แล้ว A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

ถอดรหัสสายลับ

องค์กรลับ IQA ส่งสายลับแฝงตัวเข้าไปเป็นพนักงานในบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด เพื่อสืบหาสาเหตุการเสียชีวิตจากอุบัติเหตุของประธานบริษัท จนวันหนึ่งสายลับสืบพบความจริงว่าใครเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังการจัดฉากอุบัติเหตุครั้งนี้ เขาจึงต้องการแจ้งกลับไปยัง IQA โดยส่งข้อความที่ระบุตัวคนร้ายในรูปของข้อความที่เข้ารหัสปะปนไปกับเอกสารอื่น ๆ เพื่อไม่ให้มีพิรุธ ซึ่งอาจทำให้คนร้ายไหวตัวทันและหลบหนีไปก่อน โดยเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA มีดังนี้

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด

เลขที่ 78 – 68 – 83

เดือน / รายการสินค้า	มกราคม 2561	กุมภาพันธ์ 2561	มีนาคม 2561	เมษายน 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	261	210	231	208
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	694	564	613	554

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด

เลขที่ 70 – 66 – 73

เดือน / รายการสินค้า	พฤษภาคม 2561	มิถุนายน 2561	กรกฎาคม 2561	สิงหาคม 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	204	260	264	215
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	547	694	702	577

ใบส่งของ บริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด เลขที่ 73 – 81 – 65				
รายการสินค้า \ เดือน	กันยายน 2561	ตุลาคม 2561	พฤศจิกายน 2561	ธันวาคม 2561
เหล็กข้ออ้อย (เส้น)	246	219	223	170
เหล็กเส้นกลม (เส้น)	651	584	599	441

ถ้านักเรียนเป็นเจ้าหน้าที่ IQA ที่ได้รับเอกสารจากสายลับ นักเรียนจะสรุปได้หรือไม่ว่าใครเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังการเสียชีวิตของประธานบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. ศึกษาขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA ดังต่อไปนี้

ขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA

เพื่อป้องกันข้อมูลรั่วไหล สายลับที่ต้องการติดต่อกับ IQA จะต้องแปลงข้อความที่ต้องการสื่อสารให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ผลลัพธ์ตามขั้นตอนต่อไปนี้ แล้วจึงส่งเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่ได้ในขั้นตอนสุดท้ายให้ IQA

1) เขียนข้อความที่ต้องการสื่อสารให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ที่มี 2 แถว โดยจำนวนหลักขึ้นอยู่กับความยาวของข้อความ เช่น ข้อความ I LOVE MATH สามารถเขียนให้อยู่ในรูปเมทริกซ์ขนาด 2×6 ได้เป็น

$$\begin{bmatrix} \text{I} & & \text{L} & \text{O} & \text{V} & \text{E} \\ & \text{M} & \text{A} & \text{T} & \text{H} & \end{bmatrix}$$

2) แทนตัวอักษรและสัญลักษณ์ในเมทริกซ์ด้วย Unicode และจะเรียกเมทริกซ์ที่ได้ว่าเมทริกซ์ข้อความ

ตารางแสดง Unicode ที่ใช้แทนตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่และช่องว่าง

ตัวอักษร	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Unicode	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78

ตัวอักษร	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	ช่องว่าง
Unicode	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	32

เช่น เมื่อแทนตัวอักษรและช่องว่างในเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} \mathrm{I} & & \mathrm{L} & \mathrm{O} & \mathrm{V} & \mathrm{E} \\ & \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{H} & \end{bmatrix}$

ด้วย Unicode จะได้เมทริกซ์ข้อความเป็น $\begin{bmatrix} 73 & 32 & 76 & 79 & 86 & 69 \\ 32 & 77 & 65 & 84 & 72 & 32 \end{bmatrix}$

3) ก่อนปฏิบัติภารกิจ สายลับจะได้รับเมทริกซ์เข้ารหัสขนาด 2×2 จาก IQA เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ ผลคูณของเมทริกซ์เข้ารหัสกับเมทริกซ์ข้อความ เช่น ถ้าเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA คือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้ เมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 73 & 32 & 76 & 79 & 86 & 69 \\ 32 & 77 & 65 & 84 & 72 & 32 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137 & 186 & 206 & 247 & 230 & 133 \\ 379 & 481 & 553 & 657 & 618 & 367 \end{bmatrix}$$

2. จงหาว่าเมทริกซ์ข้อความ $\begin{bmatrix} 75 & 69 & 69 & 80 & 32 & 83 \\ 77 & 73 & 76 & 73 & 78 & 71 \end{bmatrix}$ ได้จากข้อความใด

3. จากขั้นตอนการเข้ารหัสข้อความของ IQA จงเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างเมทริกซ์ข้อความ (C) เมทริกซ์เข้ารหัส (E) และเมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) และจงหาว่าเมื่อเจ้าหน้าที่ IQA ได้เมทริกซ์ผลลัพธ์ (X) จากสายลับ เขาจะสามารถหาเมทริกซ์ข้อความ (C) ได้อย่างไร

4. ถ้าเจ้าหน้าที่ IQA ได้รับเมทริกซ์ผลลัพธ์ คือ $\begin{bmatrix} 224 & 229 \\ 596 & 607 \end{bmatrix}$ จงหาข้อความที่สายลับส่งมา เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA

5. พิจารณาเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA นักเรียนคิดว่าเอกสารใดน่าจะมีเมทริกซ์ผลลัพธ์ที่สายลับตั้งใจส่งให้ เพราะเหตุใด

6. จากเอกสารที่สายลับส่งให้ IQA จงหาว่าใครเป็นผู้ที่อยู่เบื้องหลังการเสียชีวิตของประธานบริษัท สินสมุทรการช่าง จำกัด เมื่อกำหนดให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เข้ารหัสที่สายลับได้รับจาก IQA

เสริมสมอง : วิทยาการเข้ารหัสลับ

วิทยาการเข้ารหัสลับ (cryptography) เป็นศาสตร์ที่ศึกษาวิธีการรักษาความปลอดภัยของข้อมูลในการสื่อสารระหว่างสองฝ่ายโดยไม่ให้บุคคลอื่นล่วงรู้ด้วยการเข้ารหัส โดยผู้ส่งสารจะใช้รหัสลับซึ่งรู้เฉพาะผู้ส่งสารและผู้รับสารในการแปลงข้อความที่ต้องการสื่อสารเป็นข้อความใหม่ หรือที่เรียกว่า ข้อความที่ถูกเข้ารหัส เมื่อผู้รับสารได้รับข้อความที่ถูกเข้ารหัสก็จะสามารถถอดรหัสหรือแปลงข้อความที่ถูกเข้ารหัสกลับไปเป็นข้อความดั้งเดิมได้ เนื่องจากบุคคลอื่นไม่รู้รหัสลับซึ่งใช้ในการเข้ารหัส จึงไม่สามารถเข้าใจข้อความนั้นได้ ทำให้ข้อมูลที่ต้องการสื่อสารปลอดภัย

ผู้ส่งสาร : ข้อความดั้งเดิม $\rightarrow$ เข้ารหัส $\rightarrow$ ข้อความที่ถูกเข้ารหัส
ผู้รับสาร : ข้อความที่ถูกเข้ารหัส $\rightarrow$ ถอดรหัส $\rightarrow$ ข้อความดั้งเดิม

2.4 การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น

ปัญหาจำนวนมากสามารถแก้ได้โดยใช้ความรู้เรื่องระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น นักเรียนได้ศึกษาการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปรด้วยวิธีต่าง ๆ แล้ว ในหัวข้อนี้จะศึกษาวิธีหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการและจำนวนตัวแปรเท่าใดก็ได้

ระบบที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้น (system of linear equations)** แต่ในที่นี้จะเน้นเฉพาะระบบสมการเชิงเส้นที่มี 2 สมการ 2 ตัวแปร และระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ 3 ตัวแปร

ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, b$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน จะเรียกสมการ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$ ว่า **สมการเชิงเส้น n ตัวแปร** โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร

บทนิยาม 14

ระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ และมี n ตัวแปร คือ ระบบสมการที่อยู่ในรูป

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เมื่อ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร และ a_{ij}, b_i เป็นจำนวนจริง สำหรับ $i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

จะกล่าวว่า $(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ ก็ต่อเมื่อ $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$ เป็นจำนวนจริงที่เมื่อนำไปแทนตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ตามลำดับ ในแต่ละสมการ แล้วได้สมการที่เป็นจริงทั้งหมด

เรียกการเขียนจำนวนจริง n จำนวน ในรูป $\left(r_1, r_2, r_3, \dots, r_n\right)$ ว่า n **สิ่งอันดับ (ordered *n*-tuple)**

ในกรณีทั่วไป สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

สามารถเขียนระบบสมการนี้ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัวทางขวามือของระบบสมการ จะเห็นว่าหลักที่ i ของเมทริกซ์ A เป็นสัมประสิทธิ์ของตัวแปร x_i เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ นั่นเอง

สังเกตว่า ถ้าจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร นั่นคือ $m = n$ แล้ว A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส

เช่น พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y &= -1 \\ 2x - y &= 3 \end{aligned}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

สามารถเขียนระบบสมการนี้ในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ถ้า $AX = B$ แทนระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์จัตุรัส และถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว จะได้

$$X = IX = \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}\left(AX\right) = A^{-1}B$$

นั่นคือ $X = A^{-1}B$ เป็นคำตอบของ $AX = B$

ตัวอย่างที่ 30

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x+y &= 3 \\ 2x+3y &= 7 \end{aligned}$$

วิธีทำ ให้ $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX=B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

หาเมทริกซ์ผกผันของ A จะได้ $A^{-1}=\dfrac{1}{1(3)-1(2)}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

เนื่องจาก $X = A^{-1}B$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3(3)-1(7) \\ (-2)(3)+1(7) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

นั่นคือ $x=2$ และ $y=1$

ดังนั้น $(2,1)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ ■

หมายเหตุ ในการหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ ถ้าเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ไม่มีเมทริกซ์ผกผันแล้ว ระบบสมการอาจมีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์หรือไม่มีคำตอบก็ได้

เช่น พิจารณาระบบสมการ

$$\begin{aligned} x+y &= 1 \\ 2x+2y &= 2 \end{aligned}$$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

เขียนระบบสมการในรูปสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $\det(A) = 0$ ดังนั้น A ไม่มีเมทริกซ์ผกผัน
แสดงว่าไม่สามารถหาคำตอบของระบบสมการนี้ โดยใช้เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ได้

ข้อตกลง สมมติว่าแทนสมการ $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ ด้วย (1)
และแทนสมการ $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$ ด้วย (2)
และให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ เพื่อความสะดวก จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

1) ใช้ $c \times (1)$ แทนสมการ $c(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) = cb_1$
2) ใช้ $(1)+(2)$ แทนสมการ
$$(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) = b_1 + b_2$$

พิจารณาการแก้ระบบสมการเชิงเส้นสองสมการสองตัวแปร โดยวิธีกำจัดตัวแปรในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 31

จงหาคำตอบของระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 5x+2y &= -1 \\ x+y &= 1 \end{aligned}$$

วิธีทำ เรียกระบบสมการที่กำหนดให้ว่าระบบสมการ (A)

(A)
$$5x+2y = -1 \quad \text{-------}(1)$$
$$x+y = 1 \quad \text{-------}(2)$$

เพื่อความสะดวกในการแก้ระบบสมการ จะสลับสมการ (2) และ (1) ของระบบสมการ (A) เรียกระบบสมการใหม่นี้ว่าระบบสมการ (B)

(B)
$$x+y = 1 \quad \text{-------}(1)$$
$$5x+2y = -1 \quad \text{-------}(2)$$

จะกำจัดตัวแปร x จากสมการ (2) ของระบบสมการ (B) โดยการแทนที่สมการ (2) ด้วยสมการ $-5\times(1)+(2)$ จะได้ ระบบสมการ (C)

(C)
$$x+y = 1 \quad \text{-------}(1)$$
$$-3y = -6 \quad \text{-------}(2)$$

แทนที่สมการ (2) ของระบบสมการ (C) ด้วย $-\frac{1}{3}\times(2)$ จะได้ ระบบสมการ (D)

(D)
$$x+y = 1 \quad \text{-------}(1)$$
$$y = 2 \quad \text{-------}(2)$$

จะกำจัดตัวแปร y จากสมการ (1) ของระบบสมการ (D) โดยการแทนที่สมการ (1) ด้วยสมการ $-1\times(2)+(1)$ จะได้ ระบบสมการ (E)

(E)
$$x = -1 \quad \text{-------}(1)$$
$$y = 2 \quad \text{-------}(2)$$

ดังนั้น $(-1, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ (A) เพียงคำตอบเดียว ■

จากกระบวนการในตัวอย่างที่ 31 จะเห็นว่าระบบสมการ (A) ที่ต้องการหาคำตอบถูกแทนที่ด้วยระบบสมการใหม่ไปเรื่อย ๆ จนได้ระบบสมการสุดท้าย คือ ระบบสมการ (E) ซึ่งให้คำตอบ $(-1, 2)$ โดยคำตอบนี้เป็นคำตอบของระบบสมการ (A), (B), (C), (D) และ (E) ทั้งหมดด้วย ดังนั้น $(-1, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ (A) ที่ต้องการ

จะเห็นว่ากระบวนการต่อไปนี้ไม่ทำให้คำตอบของระบบสมการเชิงเส้นเปลี่ยนแปลง

1. สลับสองสมการ
2. คูณสมการใดสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์
3. คูณสมการหนึ่งด้วยค่าคงตัวที่ไม่ใช่ศูนย์แล้วนำไปบวกกับอีกสมการ

กระบวนการแก้ระบบสมการในตัวอย่างที่ 31 สามารถเขียนในรูปของเมทริกซ์ได้ดังนี้

ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการ

จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2×2

ต่อไป สร้างเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×3 โดยการเพิ่มหลักสุดท้ายให้เป็นค่าคงตัวทางขวามือของระบบสมการ เรียกเมทริกซ์ที่สร้างใหม่นี้ว่า **เมทริกซ์แต่งเติม (augmented matrix)**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

เส้นคั่นในแนวดิ่งไม่ใช่ส่วนหนึ่งของเมทริกซ์ แต่เขียนไว้เพื่อแยกส่วนของสัมประสิทธิ์กับค่าคงตัวของระบบสมการออกจากกัน

ถ้าเขียนระบบสมการ (A) – (E) ในรูปเมทริกซ์แต่งเติม จะได้

(A) $\left[\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$

(B) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \end{array}\right]$ ((B) ได้จากการสลับแถวที่ 1 และแถวที่ 2 ของ (A))

(C) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$ ((C) ได้จากการคูณแถวที่ 1 ของ (B) ด้วย -5 แล้วบวกกับแถวที่ 2)

(D) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ ((D) ได้จากการคูณแถวที่ 2 ของ (C) ด้วย $-\frac{1}{3}$)

(E) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$ ((E) ได้จากการคูณแถวที่ 2 ของ (D) ด้วย -1 แล้วบวกกับแถวที่ 1)

ดังนั้น $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $(-1, 2)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

สังเกตว่าเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ของระบบสมการ (E) เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 2×2

บทนิยาม 15

สำหรับระบบสมการเชิงเส้นที่ประกอบด้วย m สมการ n ตัวแปร ต่อไปนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

จะเรียกเมทริกซ์ที่อยู่ในรูป

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ว่า เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ

เพื่อความสะดวกในการแก้ระบบสมการเชิงเส้นหลายตัวแปรจึงนิยมเขียนระบบสมการในรูปเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถว ซึ่งมี 3 แบบต่อไปนี้กับเมทริกซ์

แบบที่ 1 สลับแถวที่ i และแถวที่ j ของเมทริกซ์ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $R_i \leftrightarrow R_j$

แบบที่ 2 คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c เมื่อ $c \neq 0$ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ cR_i

แบบที่ 3 คูณสมาชิกในแถวที่ i ด้วยค่าคงตัว c เมื่อ $c \neq 0$ แล้วนำไปบวกกับสมาชิกในแถวที่ j เมื่อ $i \neq j$ ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $cR_i + R_j$ (แทนผลลัพธ์นี้ในแถวที่ j)

เรียกการดำเนินการกับเมทริกซ์แต่ละแบบนี้ว่า **การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐาน (elementary row operation)**

บทนิยาม 16

ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการดำเนินการตามแถวบนเมทริกซ์ A จะกล่าวว่า **เมทริกซ์ A สมมูลกับเมทริกซ์ B** เขียนแทนด้วย $A \sim B$

ทฤษฎีบท 7

ให้ $AX = B$ และ $CX = D$ แทนระบบสมการเชิงเส้น ถ้า $[A \mid B]$ สมมูลกับ $[C \mid D]$ แล้ว $AX = B$ และ $CX = D$ มีคำตอบเหมือนกัน

ตัวอย่างที่ 32

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 3x+6y-z &= 12 \\ 2y-6z &= -14 \\ x+y+2z &= 9 \end{aligned}$$

วิธีทำ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -1 & 12 \\ 0 & 2 & -6 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & -1 & 12 \\ 0 & 2 & -6 & -14 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -6 & -14 \\ 3 & 6 & -1 & 12 \end{array}\right] R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -6 & -14 \\ 0 & 3 & -7 & -15 \end{array}\right] -3R_1 + R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & -15 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_2$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{l} -R_2 + R_1 \\ \\ -3R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 16 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \frac{1}{2}R_3$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} -5R_3 + R_1 \\ 3R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

ดังนั้น $(1, 2, 3)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ ■

ตัวอย่างที่ 33

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ 2x-2y+z &= 1 \\ x-3y &= 0 \end{aligned}$$

วิธีทำ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1+R_2 \\ -R_1+R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_2+R_3 \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$\begin{aligned} x+y+z &= 3 \\ -4y-z &= -5 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่าระบบสมการสุดท้ายไม่มีคำตอบ
ดังนั้น ระบบสมการตั้งต้นจึงไม่มีคำตอบด้วย ■

ตัวอย่างที่ 34

จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x - y + 3z &= 6 \\ x - 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

วิธีทำ เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -2R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -R_2 + R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{3}R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} -R_2 + R_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x + z = 3 \qquad \text{-------}(1)$$

$$y - z = 0 \qquad \text{-------}(2)$$

$$0 = 0 \qquad \text{-------}(3)$$

เนื่องจากสมการ (3) เป็นจริงเสมอ จึงหาเฉพาะค่าของ x, y และ z ที่สอดคล้องกับสมการ (1) และ (2) ก็เพียงพอ

จากสมการ (1) และ (2) จะได้ $x = -z+3$ และ $y = z$

จะเห็นว่าทั้ง x และ y ขึ้นอยู่กับ z นั่นคือ สามารถเลือก z ให้เป็นจำนวนจริงใดก็ได้

ในที่นี้ให้ $z = t$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการ คือ $(-t+3, t, t)$ เมื่อ t เป็นจำนวนจริงใด ๆ ■

ข้อสังเกต ระบบสมการในตัวอย่างที่ 34 มีคำตอบเป็นจำนวนอนันต์

ตัวอย่างที่ 35

ในการผลิตอาหารสัตว์ต้องใช้วัตถุดิบสำคัญ 3 ชนิด คือ ข้าวโพด ข้าวสาลี และกากถั่วเหลือง โดยวัตถุดิบแต่ละชนิดมีสารอาหารสำคัญ คือ คาร์โบไฮเดรต โปรตีน และใยอาหาร ซึ่งวัตถุดิบแต่ละชนิดในปริมาณ 1 กิโลกรัม จะมีปริมาณสารอาหารสำคัญ ดังนี้

วัตถุดิบ / สารอาหาร (หน่วย)	ข้าวโพด	ข้าวสาลี	กากถั่วเหลือง
คาร์โบไฮเดรต	6	9	4
โปรตีน	3	2	6
ใยอาหาร	1	3	2

หากต้องการผลิตอาหารสัตว์ที่มีคาร์โบไฮเดรต 775 หน่วย โปรตีน 371 หน่วย และใยอาหาร 210 หน่วย จะต้องใช้ข้าวโพด ข้าวสาลี และกากถั่วเหลืองอย่างละกี่กิโลกรัม

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณข้าวโพด

y แทนปริมาณข้าวสาลี

และ z แทนปริมาณกากถั่วเหลือง

เนื่องจากต้องการผลิตอาหารสัตว์ที่มีคาร์โบไฮเดรต 775 หน่วย โปรตีน 371 หน่วย และใยอาหาร 210 หน่วย จึงสามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} 6x+9y+4z &= 775 \\ 3x+2y+6z &= 371 \\ x+3y+2z &= 210 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 4 & 775 \\ 3 & 2 & 6 & 371 \\ 1 & 3 & 2 & 210 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 9 & 4 & 775 \\ 3 & 2 & 6 & 371 \\ 1 & 3 & 2 & 210 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 210 \\ 3 & 2 & 6 & 371 \\ 6 & 9 & 4 & 775 \end{array}\right] \begin{matrix} R_1 \leftrightarrow R_3 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 210 \\ 0 & -7 & 0 & -259 \\ 0 & -9 & -8 & -485 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -3R_1+R_2 \\ -6R_1+R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 210 \\ 0 & 1 & 0 & 37 \\ 0 & -9 & -8 & -485 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ -\frac{1}{7}R_2 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 99 \\ 0 & 1 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & -8 & -152 \end{array}\right] \begin{matrix} -3R_2+R_1 \\ \\ 9R_2+R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 99 \\ 0 & 1 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{8}R_3 \end{matrix}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 61 \\ 0 & 1 & 0 & 37 \\ 0 & 0 & 1 & 19 \end{array}\right] \begin{matrix} -2R_3+R_1 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x = 61$$
$$y = 37$$
$$z = 19$$

นั่นคือ $(61, 37, 19)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ
ดังนั้น ต้องใช้ข้าวโพด 61 กิโลกรัม ข้าวสาลี 37 กิโลกรัม และกากถั่วเหลือง 19 กิโลกรัม

■

ตัวอย่างที่ 36

ในการแข่งขันฟุตบอลการกุศลครั้งหนึ่ง ผู้จัดการแข่งขันมีรายได้จากการแข่งขันครั้งนี้ 900,000 บาท ซึ่งประกอบด้วยรายได้จากการขายของที่ระลึกและรายได้จากการขายบัตรเข้าชมการแข่งขัน (โดยบัตรเข้าชมการแข่งขันมี 2 ประเภท คือ บัตรที่นั่งในโซน A ราคาใบละ 100 บาท และบัตรที่นั่งในโซน B ราคาใบละ 150 บาท) ถ้ามีผู้เข้าชมการแข่งขัน 5,000 คน และรายได้จากการขายบัตรเข้าชมการแข่งขันมากกว่ารายได้จากการขายของที่ระลึกอยู่ 300,000 บาท จงหาว่าผู้จัดการแข่งขันมีรายได้จากการขายของที่ระลึกกี่บาท และขายบัตรที่นั่งในโซน A และ B ได้โซนละกี่ใบ

วิธีทำ ให้ x แทนรายได้จากการขายของที่ระลึก
y แทนจำนวนบัตรที่นั่งในโซน A ที่ขายได้ทั้งหมด
และ z แทนจำนวนบัตรที่นั่งในโซน B ที่ขายได้ทั้งหมด
จากโจทย์ สามารถเขียนเป็นระบบสมการเชิงเส้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned} x+100y+150z &= 900,000 \\ y+z &= 5,000 \\ -x+100y+150z &= 300,000 \end{aligned}$$

เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการนี้ คือ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & 150 & 900,000 \\ 0 & 1 & 1 & 5,000 \\ -1 & 100 & 150 & 300,000 \end{array}\right]$$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมได้ดังนี้

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & 150 & 900,000 \\ 0 & 1 & 1 & 5,000 \\ -1 & 100 & 150 & 300,000 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 100 & 150 & 900,000 \\ 0 & 1 & 1 & 5,000 \\ 0 & 200 & 300 & 1,200,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 50 & 400,000 \\ 0 & 1 & 1 & 5,000 \\ 0 & 0 & 100 & 200,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} -100R_2 + R_1 \\ \\ -200R_2 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 50 & 400,000 \\ 0 & 1 & 1 & 5,000 \\ 0 & 0 & 1 & 2,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{100}R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 300,000 \\ 0 & 1 & 0 & 3,000 \\ 0 & 0 & 1 & 2,000 \end{array}\right] \begin{array}{l} -50R_3 + R_1 \\ -R_3 + R_2 \\ \\ \end{array}$$

เมื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ให้อยู่ในรูประบบสมการจะได้

$$x = 300,000$$
$$y = 3,000$$
$$z = 2,000$$

นั่นคือ $(300000, 3000, 2000)$ เป็นคำตอบของระบบสมการ

ดังนั้น ผู้จัดการแข่งขันมีรายได้จากการขายของที่ระลึก 300,000 บาท และขายบัตรที่นั่งในโซน A และ B ได้ 3,000 และ 2,000 ใบ ตามลำดับ ■

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

1) $5x+17y=1$
$2x+7y=-2$

2) $11x-4y=2$
$3x-y=3$

2. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1) $5x-7y=12$
$x+4y=-2$

2) $x-3y=-5$
$-2x+6y=10$

3) $x+3y+z=2$
$x-y-3z=-6$
$2x-3y=7$

4) $4x+5y-5z=6$
$x+2y-z=1$
$x-y-2z=3$

5) $2x+y+7z=6$
$x-2y-2z=-2$
$3x-y+5z=-16$

6) $3x+2y-2z=-6$
$5x-3z=-3$
$x+4y-3z=-11$

7) $x-3z=-1$
$3x+y-2z=3$
$2x+2y+z=3$

8) $2x+y+z=3$
$x+2y+z=4$
$x+y+2z=5$

9) $x+2y+3z=0$
$4x+5y+6z=4$
$7x+8y+9z=7$

10) $3x+2y+z=2$
$x+y-2z=-4$
$5x+4y+z=6$

11) $2x-y-4z=-1$
$3x-y-5z=0$
$x-2y-5z=-5$

12) $x-2y-7z=-6$
$3x+y-2z=-2$
$2x+y+z=-2$

3. รถโดยสารสาธารณะประเภทหนึ่งจัดเก็บค่าโดยสารแบบอัตราเดียวตลอดสาย โดยกำหนดอัตราค่าโดยสารดังนี้

	ค่าโดยสาร (บาท)
บุคคลทั่วไป	14
นักเรียน	9
ผู้สูงอายุ	7

ถ้าในหนึ่งวันมีผู้ใช้บริการรถโดยสารสาธารณะประเภทนี้ทั้งหมด 2,420 คน คิดเป็นรายได้ 32,540 บาท โดยมีจำนวนบุคคลทั่วไปที่มาใช้บริการเป็น 10 เท่าของจำนวนนักเรียนและผู้สูงอายุรวมกัน จงหาว่ามีบุคคลทั่วไป นักเรียน และผู้สูงอายุมาใช้บริการอย่างละกี่คน

4. ร้านอาหารแห่งหนึ่งสั่งซื้อวัตถุดิบในการประกอบอาหารในเดือนมกราคมถึงมีนาคม 2561 ดังนี้

วัตถุดิบ / เดือน	กุ้ง (กิโลกรัม)	ปลาหมึก (กิโลกรัม)	หอยแครง (กิโลกรัม)	ค่าวัตถุดิบในแต่ละเดือน (บาท)
มกราคม	50	70	20	22,100
กุมภาพันธ์	15	60	45	15,600
มีนาคม	70	20	30	19,400

ถ้าราคาวัตถุดิบแต่ละชนิดไม่เปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาดังกล่าว จงหาว่าวัตถุดิบแต่ละชนิดมีราคากิโลกรัมละเท่าใด

5. ประสิทธิ์นำผ้าส่งซักที่ร้านนุ่มหอมนาน โดยที่

ครั้งที่ 1 เขาส่งซักกางเกงยีนส์ 1 ตัว กางเกงขาสั้น 5 ตัว และเสื้อเชิ้ต 3 ตัว คิดเป็นเงิน 115 บาท

ครั้งที่ 2 เขาส่งซักกางเกงยีนส์ 2 ตัว กางเกงขาสั้น 5 ตัว และเสื้อเชิ้ต 1 ตัว คิดเป็นเงิน 105 บาท

ครั้งที่ 3 เขาส่งซักกางเกงยีนส์ 3 ตัว และเสื้อเชิ้ต 4 ตัว คิดเป็นเงิน 120 บาท

1) ร้านนุ่มหอมนานคิดค่าซักผ้าแต่ละชนิดตัวละเท่าใด
2) ถ้าประสิทธิ์ส่งซักกางเกงยีนส์ 6 ตัว กางเกงขาสั้น 2 ตัว และเสื้อเชิ้ต 7 ตัว เขาจะต้องจ่ายเงินทั้งหมดเท่าใด

6. จงหาสมการพาราโบลาที่ผ่านจุด $(-1, 9), (1, -1)$ และ $(2, 3)$

7. ร้านค้าออนไลน์แห่งหนึ่งกำหนดอัตราค่าจัดส่งสินค้าดังนี้

จำนวนสินค้าที่สั่งซื้อ (ชิ้น)	ค่าจัดส่งสินค้า (บาท)
1	50
2	30
ตั้งแต่ 3 ชิ้นขึ้นไป	0

ถ้าในหนึ่งเดือนที่ผ่านมามีลูกค้าสั่งซื้อสินค้า 300 ครั้ง โดยมีค่าจัดส่งสินค้าทั้งหมด 5,500 บาท และมีการสั่งซื้อสินค้าแบบ 1 ชิ้น น้อยกว่าการสั่งซื้อสินค้าแบบ 3 ชิ้นขึ้นไปอยู่ 100 ครั้ง จงหาว่ามีการสั่งซื้อสินค้าแบบ 1 ชิ้น 2 ชิ้น และ 3 ชิ้นขึ้นไป อย่างละกี่ครั้ง

8. ผัดเห็ดรวมมิตรประกอบด้วยเห็ด 3 ชนิด คือ เห็ดฟาง เห็ดหอม และเห็ดโคน โดยที่เห็ดแต่ละชนิดในปริมาณ 100 กรัม มีโปรตีน ไขมัน และคาร์โบไฮเดรต ดังนี้

ประเภทของเห็ด / สารอาหาร (กรัม)	เห็ดฟาง	เห็ดหอม	เห็ดโคน
โปรตีน	3	2	6
ไขมัน	0.1	0.1	0.3
คาร์โบไฮเดรต	5	4	5

ถ้าต้องการผัดเห็ดรวมมิตรที่มีโปรตีน 85 กรัม ไขมัน 4 กรัม และคาร์โบไฮเดรต 95 กรัม จะต้องใช้เห็ดฟาง เห็ดหอม และเห็ดโคนอย่างละเท่าใด

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. จงหา x, y และ z ที่ทำให้

$$3\begin{bmatrix} y & -z \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} x & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & z \end{bmatrix}$$

2. จงหา x และ y ที่ทำให้ $x\begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix} - 2y\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \end{bmatrix}$

3. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$

$E = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ และ $F = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $62B + 38B - 2A$
2) CD และ DC
3) $(AB)^t$, A^tB^t และ B^tA^t
4) $(E + I_3)(E - I_3)$
5) $AB - 2CD$
6) $DC - E^2 + 4F$
7) $2AC + D^tE$
8) $(A^tB)^t - D^tC^t$
9) $(BD^t)F + C$
10) $(CE)D - CD + 3A^2$

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ และ $A^2 = 3I_2$ จงหา x และ y ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ X ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1) $2X - A^tB = A^{40,000}$
2) $BA = 2(X - B^{-1})$

6 จงหา a, b, c และ d ที่ทำให้

1) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

7 จงหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 7 \\ -20 & -8 & -12 \\ 10 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 \\ -5 & -1 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

6) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

8 กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $\det(A^t) + \det(B) - \det(C^t)$

2) $\det(ABC)$

3) $\det(A^3B^2C^2) - \det(AB^3C^5)$

9 จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เมทริกซ์คู่ใดเป็นเมทริกซ์ผกผันซึ่งกันและกัน

$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

10 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้ามี)

1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

3) $\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

4) $\begin{bmatrix} \tan\theta & \sec\theta \\ \sec\theta & \tan\theta \end{bmatrix}$

11 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ จงหา

1) เมทริกซ์ผกผันของ $A+B$

2) เมทริกซ์ผกผันของ AB

12 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้โดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

1) $2x + y = 20$
$5x + 3y = 17$

2) $4x - 3y = 13$
$7x - 5y = 13$

13 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1) $x + 2y = 5$
$3x + 4y = 11$

2) $x - 3y = -2$
$-3x + 9y = 6$

3) $x + 2y + 4z = 7$
$x + 2y + 3z = 6$
$x + y + 2z = 4$

4) $-x + y + 5z = 15$
$2x - 3y + 4z = 29$
$3x + y - 2z = -5$

5) $x + 2y + 5z = 16$
$2x + 2y + 6z = 20$
$x + 2y + 6z = 18$

6) $2x + 2z = 2$
$x + y + 2z = 1$
$3x - y + 2z = 1$

7) $2x + 4y + 8z = 0$
$x + 2y + 3z = 0$
$x + y + 2z = 0$

8) $x + y + 2z = 0$
$x + z = 0$
$3x - y + 2z = 0$

14 สำนักพิมพ์แห่งหนึ่งบันทึกยอดขายหนังสือในปี 2561 (มีหน่วยเป็นเล่ม) ของหนังสือจำนวน 6 เล่ม ซึ่งประกอบด้วยหนังสือสารคดี 3 เล่ม และหนังสือจิตวิทยา 3 เล่ม ได้ดังนี้

	เล่มที่ 1	เล่มที่ 2	เล่มที่ 3
สารคดี	100	200	500
จิตวิทยา	200	300	400

ถ้าหนังสือสารคดีทุกเล่มราคา 150 บาท และหนังสือจิตวิทยาทุกเล่มราคา 200 บาท

1) จงหาว่าบริษัทจะมีรายได้จากการขายหนังสือทั้งหมดเท่าใด
2) ถ้าบริษัทต้องการให้ได้ยอดขาย (มีหน่วยเป็นเล่ม) เพิ่มขึ้น 30% ในปีถัดไป แล้วบริษัทจะต้องขายหนังสือสารคดี เล่มที่ 1 เล่มที่ 2 และเล่มที่ 3 และหนังสือจิตวิทยา เล่มที่ 1 เล่มที่ 2 และเล่มที่ 3 ให้ได้อย่างละกี่เล่ม

15 ข้อสอบแข่งขันวิชาคณิตศาสตร์ของโรงเรียนแห่งหนึ่งสามารถแบ่งโจทย์ได้เป็นสามระดับ คือ ยาก ปานกลาง และง่าย โดยการแข่งขันนี้มีสองรอบ รอบแรก กำหนดคะแนนสำหรับโจทย์ยากข้อละ 6 คะแนน โจทย์ปานกลางข้อละ 4 คะแนน และโจทย์ง่ายข้อละ 1 คะแนน และรอบที่สอง กำหนดคะแนนสำหรับโจทย์ยากข้อละ 8 คะแนน โจทย์ปานกลางข้อละ 5 คะแนน และโจทย์ง่ายข้อละ 2 คะแนน ถ้าเยาวมาลย์และการเวกได้เข้าร่วมการแข่งขันนี้ โดยจำนวนโจทย์ที่แต่ละคนสามารถทำได้ถูกต้อง เป็นดังนี้

จำนวนโจทย์ที่ทำได้ (ข้อ) / ผู้เข้าแข่งขัน	รอบแรก			รอบที่สอง		
	โจทย์ยาก	โจทย์ปานกลาง	โจทย์ง่าย	โจทย์ยาก	โจทย์ปานกลาง	โจทย์ง่าย
เยาวมาลย์	3	1	6	2	5	3
การเวก	3	5	2	5	4	7

จงหาว่าเยาวมาลย์และการเวกได้คะแนนสอบในแต่ละรอบเท่าใด และได้คะแนนรวมจากการสอบทั้งสองรอบเท่าใด

16 รัตนาต้องการนำเงิน 50,000 บาท ไปลงทุนโดยการซื้อหน่วยลงทุนในกองทุนรวมที่สนใจ จำนวน 3 กองทุน ซึ่งแต่ละกองทุนมีผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลังต่อปี เมื่อพิจารณาในช่วงระยะเวลา 5 ปีที่ผ่านมา เป็นดังนี้

	ผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลังต่อปี
กองทุนรวม A	6%
กองทุนรวม B	4%
กองทุนรวม C	10%

เนื่องจากการลงทุนที่มีโอกาสได้รับผลตอบแทนสูงย่อมมีความเสี่ยงที่สูงด้วย รัตนาจึงเลือกที่จะลงทุนในกองทุนรวม C เพียง 1 ใน 3 ของการลงทุนในกองทุนรวม B ถ้ารัตนาต้องการนำเงินทั้งหมดไปลงทุนในกองทุนรวมทั้งสามเพื่อให้ได้ผลตอบแทน 2,900 บาท ในปีแรก โดยพิจารณาจากผลตอบแทนเฉลี่ยย้อนหลัง 5 ปี รัตนาจะต้องลงทุนในแต่ละกองทุนเป็นจำนวนเงินเท่าใด

เสริมสมอง : กองทุนรวม

กองทุนรวม (mutual fund) คือ โครงการลงทุนที่นำเงินของผู้ซื้อหน่วยลงทุนหลาย ๆ รายมารวมกันและมีการบริหารจัดการกองทุนโดยผู้จัดการกองทุนที่เป็นมืออาชีพในการจัดการลงทุน เพื่อสร้างผลตอบแทนให้กับกองทุน จากนั้นจึงนำผลตอบแทนที่ได้มาเฉลี่ยกลับคืนให้กับผู้ซื้อหน่วยลงทุนตามสัดส่วนการลงทุนในกองทุนรวมนั้น

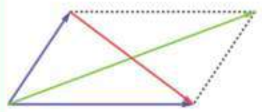
17 บริษัทแห่งหนึ่งมีรายได้รวมในแต่ละปีแสดงได้ดังตาราง

	ปีที่ 1	ปีที่ 2	ปีที่ 3
รายได้รวม (ล้านบาท)	10	9	4

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างปีที่ x และรายได้รวมของบริษัทเป็นฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งเขียนได้ในรูป $f(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จงหา

1) ฟังก์ชันแสดงรายได้รวมของบริษัทในแต่ละปี
2) รายได้รวมของบริษัทในปีที่ 7

บทที่ 3 | เวกเตอร์



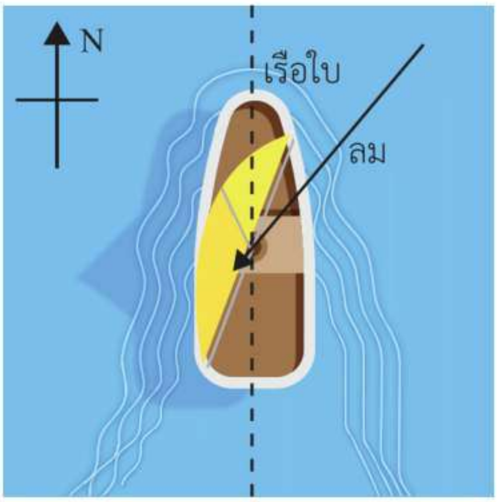
จุดมุ่งหมาย

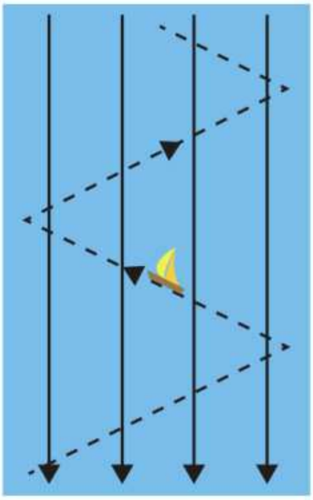
1. เข้าใจความหมายของเวกเตอร์
2. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์
3. หาผลคูณเชิงสเกลาร์
4. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์
5. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ไปใช้ในการแก้ปัญหา

บทที่ 3

เวกเตอร์

ในชีวิตจริงนักเรียนคุ้นเคยกับปริมาณที่บ่งบอกขนาดในรูปของจำนวน เช่น มวล ปริมาตร ความยาว ระยะทาง อุณหภูมิ อย่างไรก็ตาม ในการบอกปริมาณของบางสิ่งต้องบอกขนาดของสิ่งที่พิจารณาควบคู่กับการบอกทิศทางของสิ่งเหล่านั้นด้วย เช่น ในการออกแรงผลักวัตถุบนพื้น มีทั้งขนาดของแรงที่กระทำกับวัตถุและทิศทางของแรงที่กระทำกับวัตถุ ซึ่งสามารถแทนแรงนี้ได้ด้วย "เวกเตอร์" ของแรง ความรู้เรื่องเวกเตอร์นำไปสู่บทประยุกต์ในชีวิตจริง เช่น นักเดินเรือใบต้องแล่นเรือเฉียงไปเฉียงมาแบบสลับฟันปลา เพื่อให้ถึงจุดหมายซึ่งอยู่ทางด้านต้นลม ดังรูป





นอกจากนี้ยังมีการนำแนวคิดเรื่องเวกเตอร์ไปใช้ในการศึกษาเรื่องอื่น ๆ อีกมากมาย เช่น การวิเคราะห์คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ การวิเคราะห์ภาพฉายในปริภูมิ การรวมเวกเตอร์ความเร็วในกลศาสตร์

ความรู้ก่อนหน้า

- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ
- เมทริกซ์

ipst.me/8454

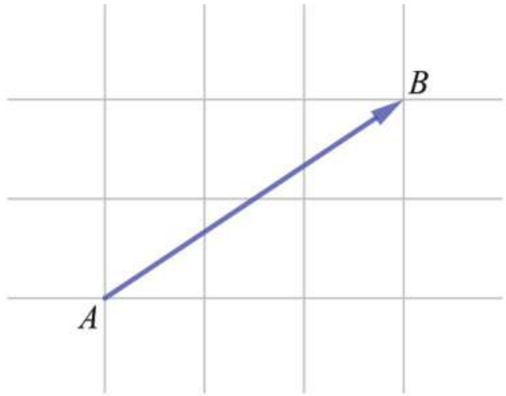
3.1 เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์

ปริมาณที่เกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์มีสองประเภท ประเภทหนึ่งใช้บอกแต่ขนาด เช่น มวล ความสูง อุณหภูมิ ซึ่งแสดงขนาดด้วยจำนวนเพื่อบอกให้ทราบว่ามากหรือน้อยเพียงใด เช่น กล่องใบหนึ่งมีมวล 20 กรัม ชายคนหนึ่งสูง 180 เซนติเมตร วันนี้กรุงเทพฯ มีอุณหภูมิสูงสุด 32 องศาเซลเซียส ส่วนปริมาณอีกประเภทหนึ่งบอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น การกระจัดของการเคลื่อนที่ ความเร็ว ความเร่ง ซึ่งปริมาณเหล่านี้จำเป็นต้องบอกทั้งขนาดและทิศทาง เช่น ชายคนหนึ่งเดินทางไปทางทิศใต้เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร นักเทนนิสเสิร์ฟลูกเทนนิสไปข้างหน้าด้วยความเร็ว 180 กิโลเมตรต่อชั่วโมง รถคันหนึ่งเคลื่อนที่ไปข้างหน้าด้วยความเร่ง 2 เมตรต่อวินาที^{2}

บทนิยาม 1

ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity)** ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)**

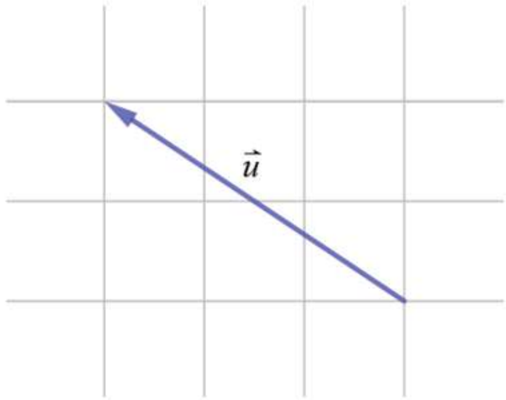
ปริมาณสเกลาร์หรือเรียกสั้น ๆ ว่า สเกลาร์ แสดงด้วยจำนวนจริง ส่วนปริมาณเวกเตอร์หรือเรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์ แสดงในเชิงเรขาคณิตได้ด้วย**ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง (directed line segment or directed segment)** โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดของเวกเตอร์และหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์



รูปที่ 1

รูปที่ 1 แสดงเวกเตอร์จาก A ไป B เขียนแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ (ในที่นี้จะใช้ $\overrightarrow{AB}$ อ่านว่า เวกเตอร์เอบี) เรียก A ว่า **จุดเริ่มต้น (initial point)** ของเวกเตอร์ และเรียก B ว่า **จุดสิ้นสุด (terminal point)** ของเวกเตอร์ ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB หรือ BA คือ ขนาดของเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

ในกรณีที่ต้องการกล่าวถึงเวกเตอร์ใด ๆ โดยที่ไม่ต้องการระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ จะใช้อักษรตัวเดียว และมีเครื่องหมาย $\rightharpoonup$ กำกับไว้ เช่น $\vec{u}$ ในรูปที่ 2 และแทนขนาดของ $\vec{u}$ ด้วยสัญลักษณ์ $|\vec{u}|$

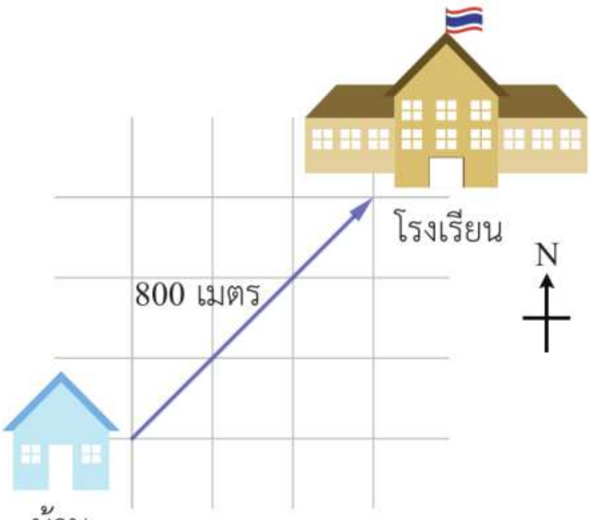


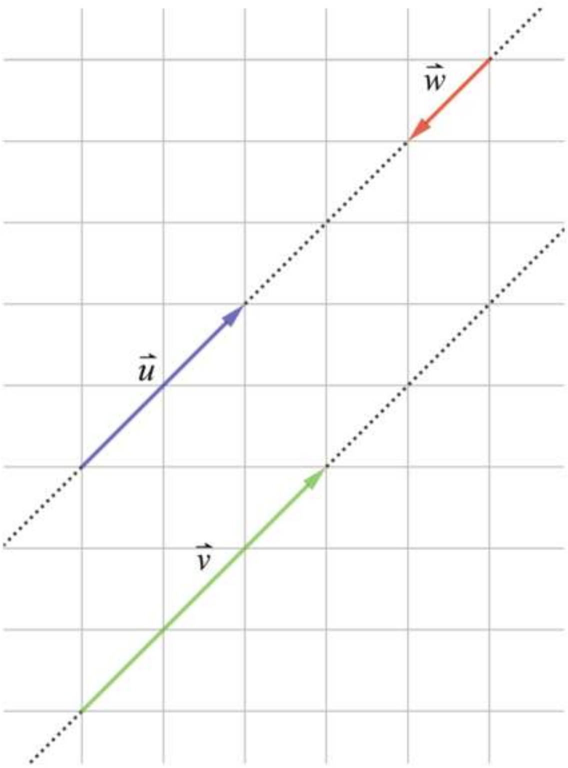
รูปที่ 2

ตัวอย่างที่ 1

จงเขียนเวกเตอร์แสดงการเดินทางของจันทร์เจ้าจากบ้านไปโรงเรียน ซึ่งโรงเรียนอยู่ทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือของบ้านและอยู่ห่างจากบ้านเป็นระยะ 800 เมตร

วิธีทำ จะได้เวกเตอร์แสดงการเดินทางของจันทร์เจ้าจากบ้านไปโรงเรียน ดังรูป





รูปที่ 3

เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน และมีหัวลูกศรไปทางเดียวกัน

จากรูปที่ 3 $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

ส่วนเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกันเป็นเวกเตอร์ที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันหรือเส้นตรงที่ขนานกัน แต่มีหัวลูกศรไปทางตรงข้ามกัน

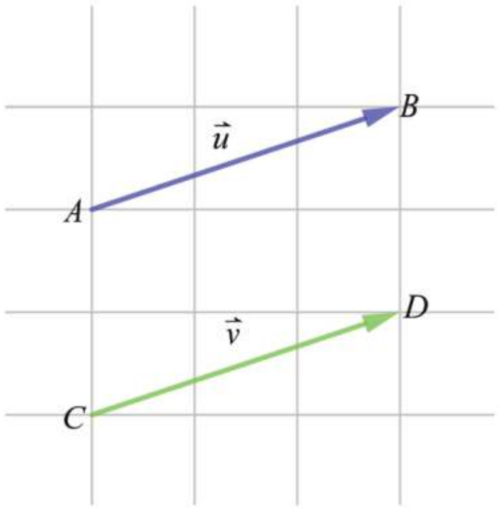
จากรูปที่ 3 $\vec{u}$ กับ $\vec{w}$ และ $\vec{v}$ กับ $\vec{w}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

บทนิยาม 2

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ **ขนานกัน** ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงข้ามกัน

$\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \,//\, \vec{v}$

ในรูปที่ 3 $\vec{u} \,//\, \vec{w}$ โดยที่ $\vec{u}$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน
$\vec{u} \,//\, \vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน
$\vec{v} \,//\, \vec{w}$ โดยที่ $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน



รูปที่ 4

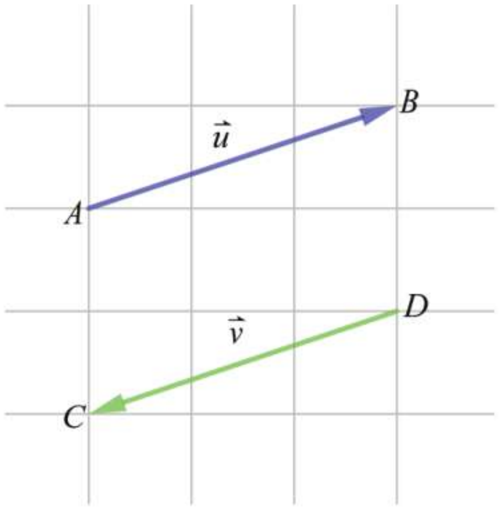
ในกรณีที่ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน ดังรูปที่ 4 จะกล่าวว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ **เท่ากัน** หรือกล่าวว่า $\overrightarrow{AB}$ **เท่ากับ** $\overrightarrow{CD}$ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3

$\vec{u}$ **เท่ากับ** $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน

$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$

เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน ไม่ว่าจะอยู่ตำแหน่งใดในระนาบจะถือว่าเป็นเวกเตอร์เดียวกันเสมอ เมื่อกำหนดเวกเตอร์ในระนาบจะสามารถเลื่อนเวกเตอร์นั้นไปตำแหน่งใดในระนาบก็ได้ โดยที่ยังคงเป็นเวกเตอร์เดียวกัน



รูปที่ 5

ในกรณีที่ $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{DC}$ มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน ดังรูปที่ 5 จะกล่าวว่า $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{DC}$ เป็นนิเสธกัน ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4

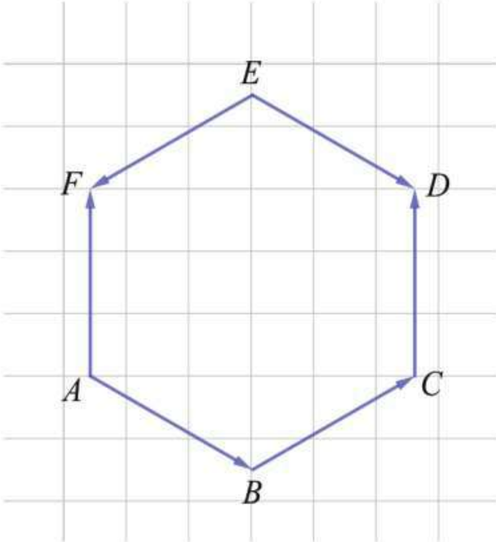
นิเสธ ของ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ $\vec{u}$

นิเสธของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 4 จะเห็นว่า $-(-\vec{u}) = \vec{u}$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนดรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $ABCDEF$ ดังรูป จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้คู่ใดบ้างที่เท่ากัน และคู่ใดบ้างที่เป็นนิเสธกัน



วิธีทำ เนื่องจาก $ABCDEF$ เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

แสดงว่า $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{BC} \,//\, \overrightarrow{EF}$ และ $\overrightarrow{CD} \,//\, \overrightarrow{AF}$

โดย $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{ED}$ มีทิศทางเดียวกัน

$\overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{AF}$ มีทิศทางเดียวกัน

และ $\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ดังนั้น $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$ และ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$

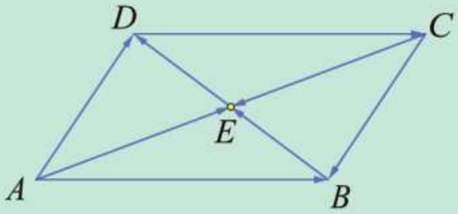
เวกเตอร์ที่เป็นนิเสธกัน คือ $\overrightarrow{BC}$ กับ $\overrightarrow{EF}$ หรืออาจเขียนความสัมพันธ์นี้ได้ว่า $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$ ■

แบบฝึกหัด 3.1ก

1. จงยกตัวอย่างปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์อย่างละ 3 ตัวอย่าง

2. ถ้าระบุทิศทางด้วยการบอกขนาดของมุมที่วัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา ซึ่งมีขนาดอยู่ระหว่าง 0 องศา ถึง 360 องศา โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว เช่น 030 องศา 125 องศา แล้ว จงเขียนเวกเตอร์ที่แสดงการเคลื่อนที่ต่อไปนี้
   1) 120 เมตร ไปทางทิศเหนือ
   2) 30 เมตร ไปทางทิศ 060 องศา
   3) 80 กิโลเมตร ไปทางทิศ 300 องศา
   4) 10 กิโลเมตร ไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือ

3. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ดังรูป จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้



   1) $\overrightarrow{AB}$ 2) $\overrightarrow{ED}$
   3) $\overrightarrow{CB}$ 4) $-\overrightarrow{CB}$
   5) $\overrightarrow{AE}$ 6) $-\overrightarrow{AE}$

4. ถ้าระบุทิศทางโดยใช้ระบบตัวเลขสามตัวแบบในข้อ 2 และให้ $\vec{u}$ แทนการเดินทาง 300 กิโลเมตร ไปทางทิศ 075 องศา แล้ว จงบรรยายการเดินทางที่แทนด้วย $-\vec{u}$

5. ถ้าระบุทิศทางโดยใช้ระบบตัวเลขสามตัวแบบในข้อ 2 และสมมติว่าชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศตะวันออกเฉียงเหนือเป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศ 315 องศา เป็นระยะทางอีก 3 กิโลเมตร แล้วชายคนนี้จะอยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร และอยู่ทางทิศใดของจุดเริ่มต้น

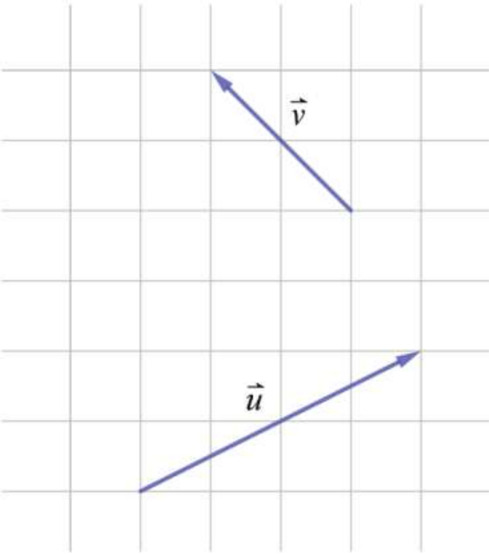
การบวกเวกเตอร์

บทนิยาม 5

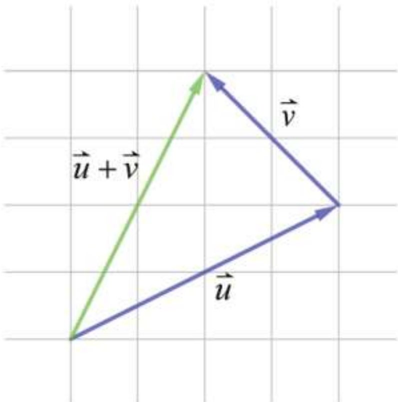
ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ เขียน $\vec{v}$ โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ **ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$** คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$

ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}+\vec{v}$

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ดังรูปที่ 6 เมื่อเขียน $\vec{v}$ โดยให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{v}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ จะได้ $\vec{u}+\vec{v}$ ดังรูปที่ 7

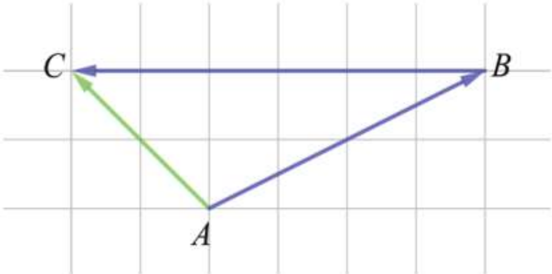


รูปที่ 6



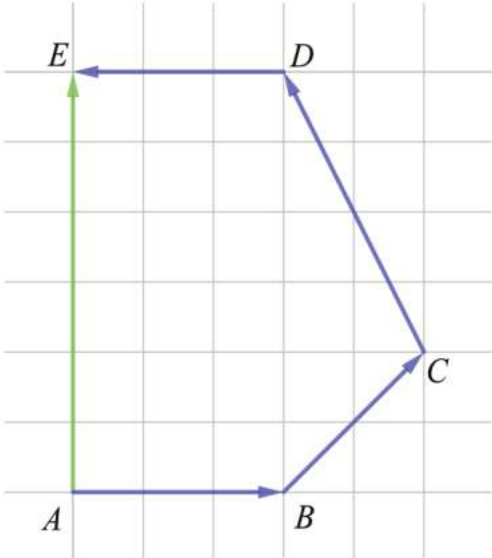
รูปที่ 7

ตัวอย่างการบวกเวกเตอร์



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

รูปที่ 8



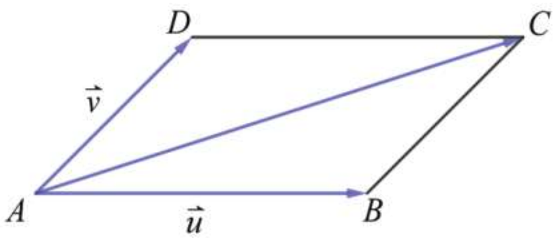
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

รูปที่ 9

ข้อสังเกต 1. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

สามารถแสดงได้ดังนี้

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ดังรูป



รูปที่ 10

ให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{DC}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน

ดังนั้น $\vec{u}=\overrightarrow{DC}$

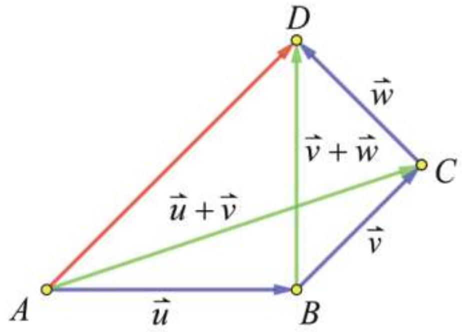
ในทำนองเดียวกัน $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$

จะได้ $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

และ $\vec{v}+\vec{u}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$

ดังนั้น $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

2. ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้ว $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ สามารถแสดงได้ดังนี้



รูปที่ 11

จากรูป ให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{BC}$ และ $\vec{w}=\overrightarrow{CD}$

จะได้ $\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

และ $\vec{v}+\vec{w}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD}$

จะได้ $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

และ $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

ดังนั้น $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

บทนิยาม 6

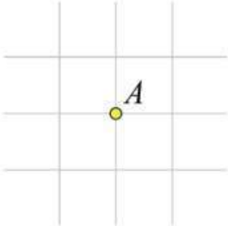
เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์

เวกเตอร์ศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

หมายเหตุ 1. โดยทั่วไปจะไม่กล่าวถึงทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์ แต่ถ้าต้องการกล่าวถึงมีข้อตกลงว่าจะระบุทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์เป็นเช่นใดก็ได้

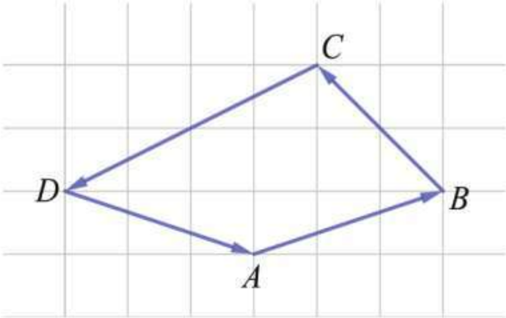
2. จากบทนิยาม 6 จะเห็นว่า สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}$ ใด ๆ $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$ และ $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$

สังเกตว่าจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์ศูนย์เป็นจุดเดียวกัน เขียนแสดงได้ดังตัวอย่างในรูปที่ 12 และ 13



$\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

รูปที่ 12



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

รูปที่ 13

สรุปสมบัติการบวกของเวกเตอร์ ได้ดังนี้
ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์

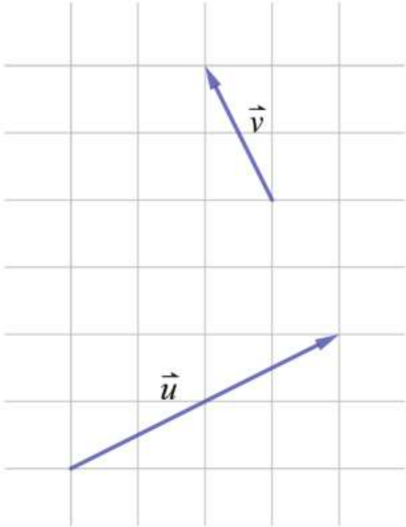
1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

การลบเวกเตอร์

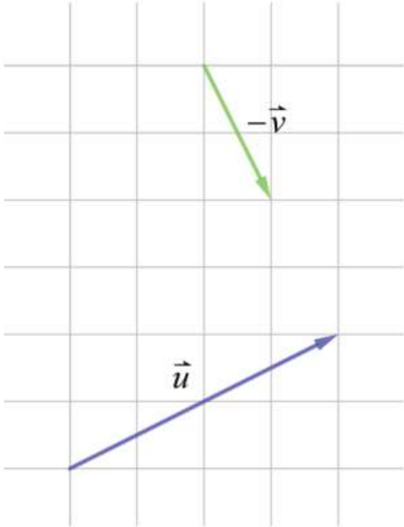
บทนิยาม 7

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ **เวกเตอร์ $\vec{u}$ ลบด้วย $\vec{v}$** เขียนแทนด้วย $\vec{u} - \vec{v}$ คือ ผลบวกของ $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

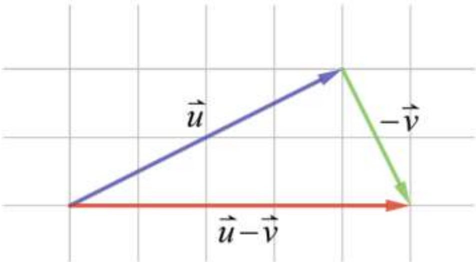
ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ ดังรูปที่ 14 หานิเสธของ $\vec{v}$ ได้ดังรูปที่ 15 จะได้ $\vec{u}-\vec{v}$ ดังรูปที่ 16



รูปที่ 14



รูปที่ 15



รูปที่ 16

ตัวอย่างที่ 3

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ จงเขียน $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ และ $\overrightarrow{DB}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

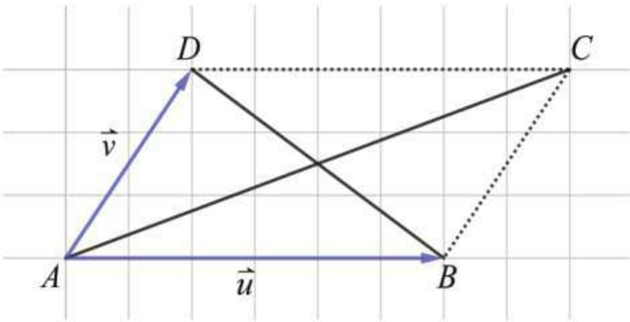
วิธีทำ จาก $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

จะได้ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$

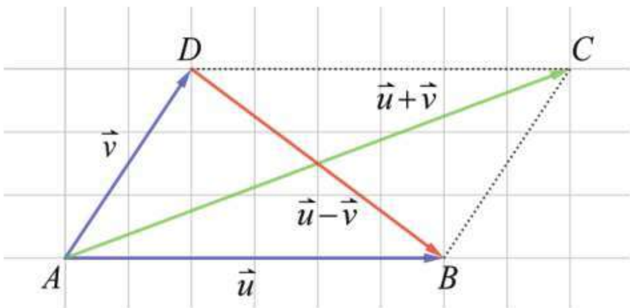
ดังนั้น $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} - \vec{u}$

และ $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = -\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} - \vec{v}$



จากตัวอย่างที่ 3 เมื่อกำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ โดยที่ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ จะได้ $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ และ $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{DB}$ ดังรูปที่ 17



รูปที่ 17

ตัวอย่างที่ 4

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$
จงเขียน $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ และ $\overrightarrow{CA}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ จาก $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

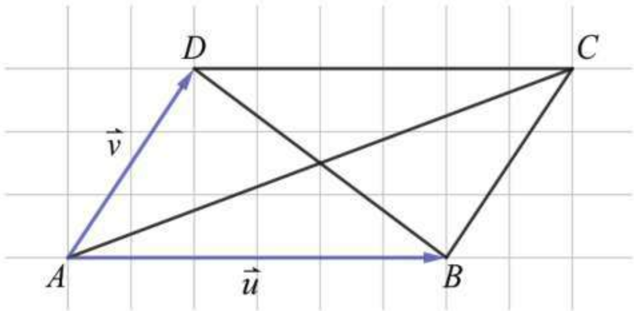
จะได้ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{v}$

และ $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{u}$

ดังนั้น $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$

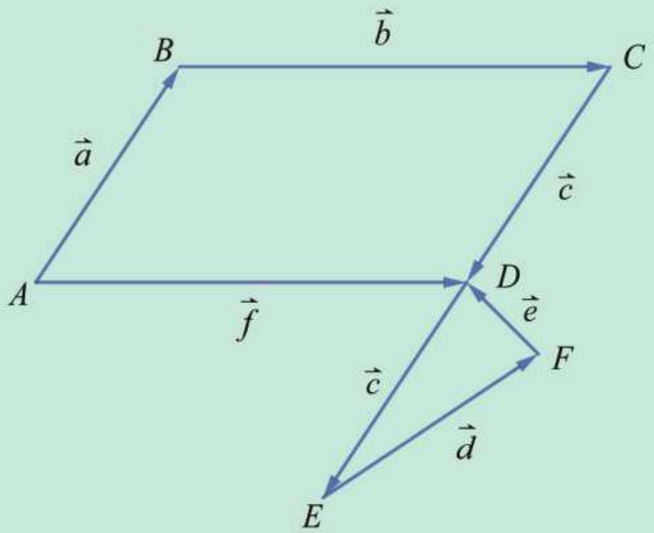
$= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

$= -\vec{v} - \vec{u}$



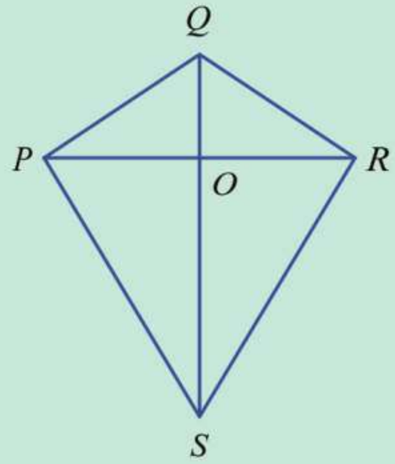
แบบฝึกหัด 3.1ข

1. จากรูป จงเขียน $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AE}$ และ $\overrightarrow{EA}$ ในรูปของ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ และ $\vec{f}$



2. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมรูปว่าว $PQRS$ ที่มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O จงหา

   1) $\overrightarrow{PQ}+\left(\overrightarrow{QS}+\overrightarrow{SP}\right)$
   2) $\left(\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{RO}\right)+\overrightarrow{RS}$
   3) $\left(\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{RQ}\right)+\overrightarrow{OR}$



การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ในการศึกษาเรื่องเวกเตอร์จะใช้อักษร $a, b, c, \ldots$ แทนสเกลาร์ (จำนวนจริง)

บทนิยาม 8

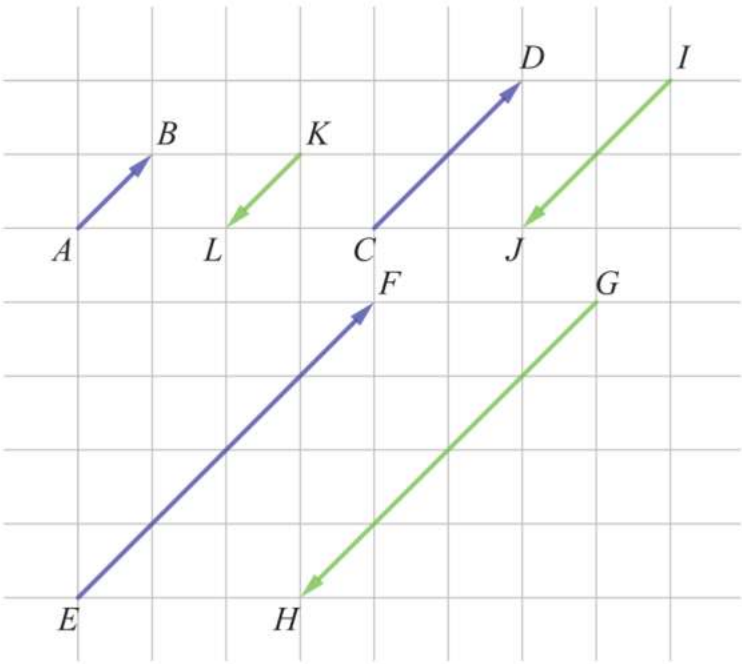
ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ **ผลคูณของ $\vec{u}$ กับสเกลาร์ a** เป็นเวกเตอร์ เขียนแทนด้วย $a\vec{u}$ โดยที่

1. ถ้า $a=0$ แล้ว $a\vec{u}=\vec{0}$
2. ถ้า $a>0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาด $|a||\vec{u}|$ หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$
3. ถ้า $a<0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาด $|a||\vec{u}|$ หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$

หมายเหตุ จากบทนิยาม 8 จะเห็นว่า

1. $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$
2. ถ้า $a \neq 0$ และ $\vec{u}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ แล้ว $a\vec{u}$ จะขนานกับ $\vec{u}$

พิจารณารูปที่ 18



รูปที่ 18

ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$

เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\right|$ และ $\overrightarrow{AB}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{u}$

เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{EF}\right| = 2\left|\vec{u}\right|$ และ $\overrightarrow{EF}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{EF} = 2\vec{u}$

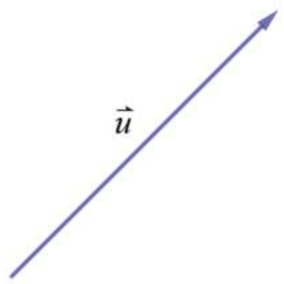
เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{GH}\right| = 2\left|\vec{u}\right|$ แต่ $\overrightarrow{GH}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{GH} = -2\vec{u}$

เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{IJ}\right| = \left|\vec{u}\right|$ แต่ $\overrightarrow{IJ}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{IJ} = -\vec{u}$

และเนื่องจาก $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{u}\right|$ แต่ $\overrightarrow{KL}$ มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ดังนั้น $\overrightarrow{KL} = -\frac{1}{2}\vec{u}$

ตัวอย่างที่ 5

ให้ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และมีทิศทางดังรูป จงบรรยายลักษณะของเวกเตอร์ต่อไปนี้



1) $4\vec{u}$
2) $-4\vec{u}$
3) $\frac{1}{4}\vec{u}$
4) $-\frac{1}{4}\vec{u}$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $4 > 0$ ดังนั้น $4\vec{u}$ จะมีขนาดเป็นสี่เท่าของขนาดของ $\vec{u}$ หรือมีขนาด 16 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

2) เนื่องจาก $-4 < 0$ ดังนั้น $-4\vec{u}$ จะมีขนาดเป็นสี่เท่าของขนาดของ $\vec{u}$ หรือมีขนาด 16 หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$

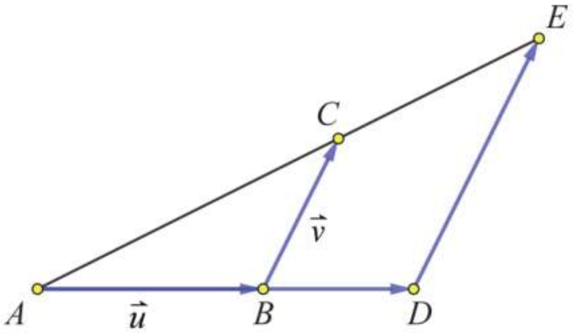
3) เนื่องจาก $\frac{1}{4} > 0$ ดังนั้น $\frac{1}{4}\vec{u}$ จะมีขนาดเป็นหนึ่งในสี่ของขนาดของ $\vec{u}$ หรือมีขนาด 1 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

4) เนื่องจาก $-\frac{1}{4} < 0$ ดังนั้น $-\frac{1}{4}\vec{u}$ จะมีขนาดเป็นหนึ่งในสี่ของขนาดของ $\vec{u}$ หรือมีขนาด 1 หน่วย แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{u}$ ■

ตัวอย่างที่ 6

จากรูป กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC คล้ายกับรูปสามเหลี่ยม ADE ดังรูป

โดยที่ $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = k$ ถ้าให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ จงแสดงว่า $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$



วิธีทำ จาก $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = k$ จะได้ว่า $|\overrightarrow{AD}| = k|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{DE}| = k|\overrightarrow{BC}|$ และ $|\overrightarrow{AE}| = k|\overrightarrow{AC}|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AD}$ มีทิศทางเดียวกัน จึงได้ว่า $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$

ในทำนองเดียวกัน $\overrightarrow{DE} = k\overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$

ดังนั้น $\overrightarrow{AD} = k\vec{u}$ และ $\overrightarrow{DE} = k\vec{v}$

สังเกตว่า $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ และ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = k\vec{u} + k\vec{v}$

เนื่องจาก $k\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ จะได้ $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ ■

สรุปสมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ได้ดังนี้

ให้ a, b เป็นสเกลาร์ และ $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์

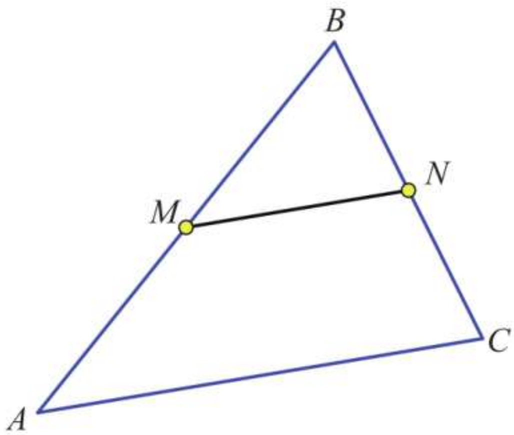
1. $1\vec{u} = \vec{u}$
2. $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
3. $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
4. $(ab)\vec{u} = a(b\vec{u}) = b(a\vec{u})$

ทฤษฎีบททางเรขาคณิตบางทฤษฎีบทอาจพิสูจน์โดยใช้เวกเตอร์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 7

จงแสดงว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดกึ่งกลางของด้านสองด้านของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้านที่สาม และขนานกับด้านที่สาม

วิธีทำ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ BC ตามลำดับ ดังรูป จะแสดงว่าส่วนของเส้นตรง MN ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้าน AC และขนานกับด้าน AC



ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$

จะได้ $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\vec{u}$ และ $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{v}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

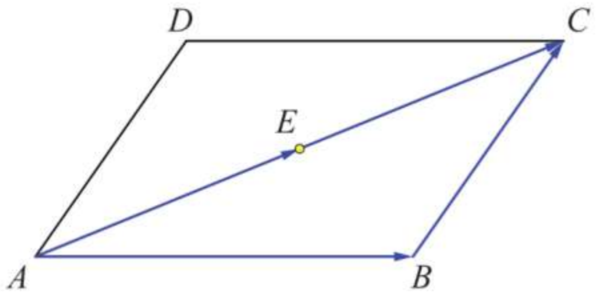
ดังนั้น $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|$ และ $\overrightarrow{MN}$ มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AC}$

นั่นคือ ส่วนของเส้นตรง MN ยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวของด้าน AC และขนานกับด้าน AC ■

ตัวอย่างที่ 8

จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน

วิธีทำ ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และจุด E เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นทแยงมุม AC ดังรูป จะแสดงว่า $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ และ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

นั่นคือ $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AD}\end{aligned}$$

และเนื่องจาก $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน จะได้ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

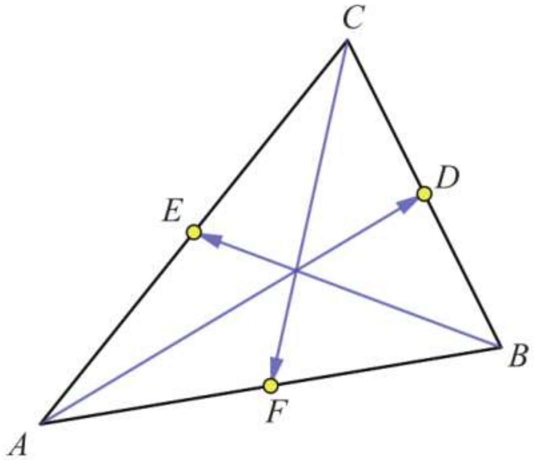
ดังนั้น
$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD}\\ &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

นั่นคือ เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน ■

ตัวอย่างที่ 9

จงแสดงว่าผลบวกของเวกเตอร์ที่มีจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นและจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามกับจุดยอดนั้นเป็นจุดสิ้นสุด เป็นเวกเตอร์ศูนย์

วิธีทำ ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีจุด D, E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC, CA และ AB ตามลำดับ ดังรูป จะแสดงว่า $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

ในทำนองเดียวกัน $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

และ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} &= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right)\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

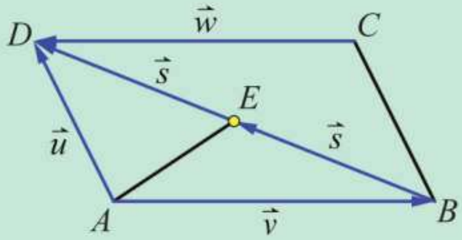
นั่นคือ ผลบวกของเวกเตอร์ที่มีจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมเป็นจุดเริ่มต้นและจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้ามกับจุดยอดนั้นเป็นจุดสิ้นสุด เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ■

แบบฝึกหัด 3.1ค

1. จงหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{u}$ กับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) $\vec{v}$ เมื่อ $3\vec{u}-2\vec{v}=\vec{v}$
   2) $\vec{w}$ เมื่อ $2\vec{u}+\vec{w}=2\vec{w}+5\vec{u}$

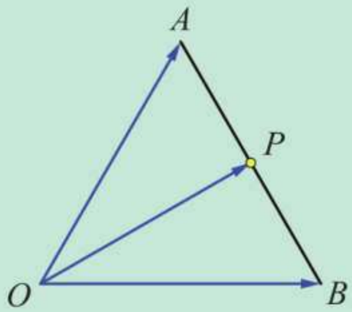
2. กำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน และ a, b เป็นจำนวนจริง
   $\vec{w}=(a+4b)\vec{u}+(2a+b+1)\vec{v}$ และ $\vec{s}=(b-2a+2)\vec{u}+(2a-3b-1)\vec{v}$
   ถ้า $3\vec{w}=2\vec{s}$ แล้ว จงหาค่าของ a และ b

3. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ดังรูป จงพิจารณาว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง



   1) $\vec{v}=\vec{w}$
   2) $\overrightarrow{DB}=\vec{u}+\vec{v}$
   3) $2\vec{s}-\vec{u}=\vec{v}$
   4) $2\overrightarrow{AE}=\vec{u}+\vec{v}$
   5) $\overrightarrow{AE}=\vec{w}+\vec{s}$
   6) $\overrightarrow{AE}=\dfrac{\vec{u}}{2}-\dfrac{\vec{w}}{2}$

4. จากรูป ถ้า P เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$ แล้ว จงแสดงว่า $\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

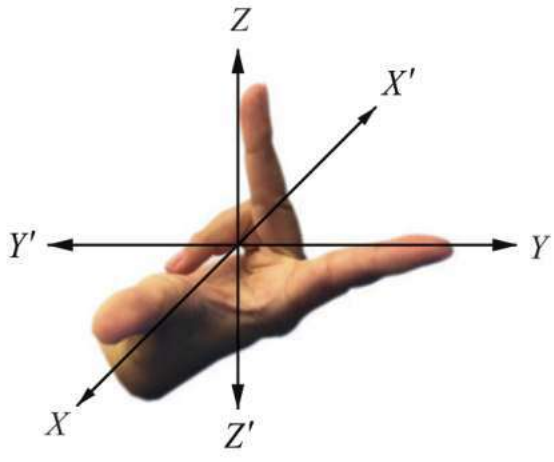


5. กำหนดส่วนของเส้นตรง AB และจุด C อยู่บน $\overline{AB}$ โดยที่ $AC:CB = m:n$ ถ้า O เป็นจุดจุดหนึ่งซึ่งไม่อยู่บนแนวเส้นตรง AB และให้ $\vec{u} = \overrightarrow{OB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ แล้ว จงแสดงว่า $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{m+n}(m\vec{u} + n\vec{v})$

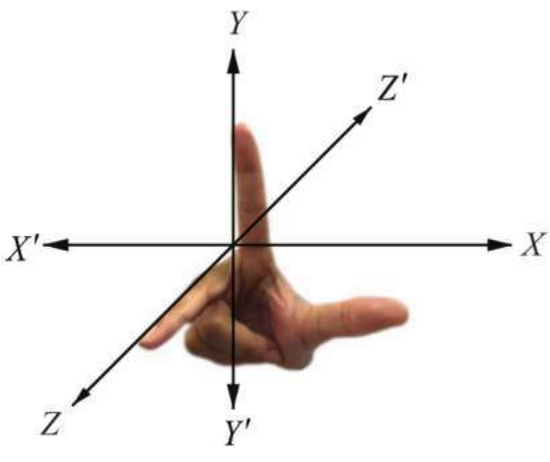
6. จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่เส้นทแยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกันเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

3.2 ระบบพิกัดฉากสามมิติ

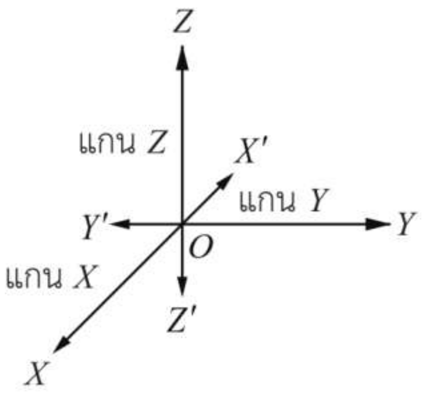
ระบบพิกัดฉากสามมิติจะกำหนดโดยให้เส้นตรง XX', YY' และ ZZ' เป็นเส้นตรงสามเส้นที่ตั้งฉากซึ่งกันและกันที่จุด O ซึ่งเรียกว่า จุดกำเนิด โดยการกำหนดทิศทางของเส้นตรงทั้งสามนั้นจะใช้ระบบมือขวา ดังรูปที่ 19 และ 20 โดยให้นิ้วโป้งแทนทิศทางทางบวกของแกน X นิ้วชี้แทนทิศทางทางบวกของแกน Y และนิ้วกลางแทนทิศทางทางบวกของแกน Z



รูปที่ 19



รูปที่ 20

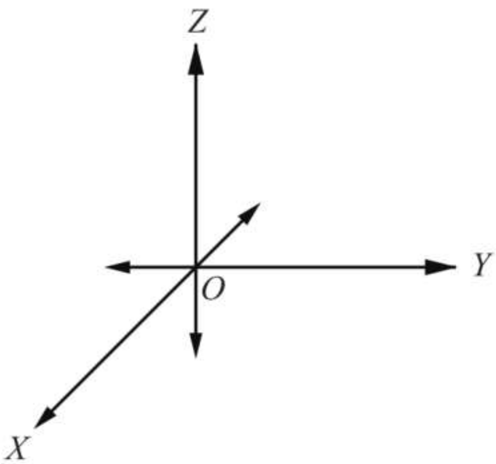


รูปที่ 21

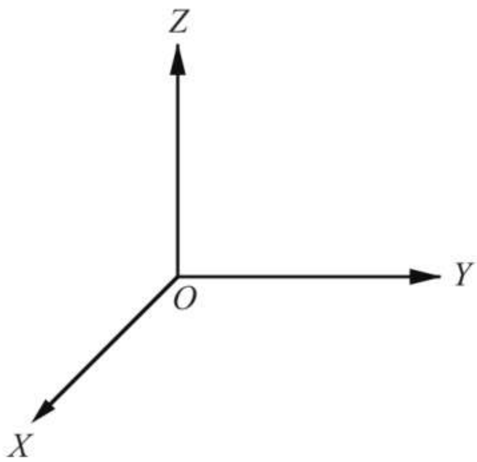
จะเรียกเส้นตรง XX', YY' และ ZZ' ว่า **แกนพิกัด** X **แกนพิกัด** Y และ**แกนพิกัด** Z หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **แกน** X **(**X**–axis) แกน** Y **(**Y**–axis)** และ **แกน** Z **(**Z**–axis)** ตามลำดับ และเรียกจุด O ซึ่งเป็นจุดตัดของแกน X แกน Y และแกน Z ว่า **จุดกำเนิด (origin)** ดังรูปที่ 21

เรียกรังสี OX, OY และ OZ ว่า **แกน** X **ทางบวก (positive** X**–axis) แกน** Y **ทางบวก (positive** Y**–axis)** และ**แกน** Z **ทางบวก (positive** Z**–axis)** ตามลำดับ และเรียกรังสี OX', OY' และ OZ' ว่า **แกน** X **ทางลบ (negative** X**–axis) แกน** Y **ทางลบ (negative** Y**–axis)** และ **แกน** Z **ทางลบ (negative** Z**–axis)** ตามลำดับ

โดยทั่วไป เมื่อเขียนรูปแกนพิกัดในระบบพิกัดฉากสามมิติ นิยมเขียนเฉพาะแกน X แกน Y และแกน Z ทางบวก ซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูปที่ 22 และ 23 โดยละแกน X แกน Y และแกน Z ทางลบไว้ในฐานที่เข้าใจ



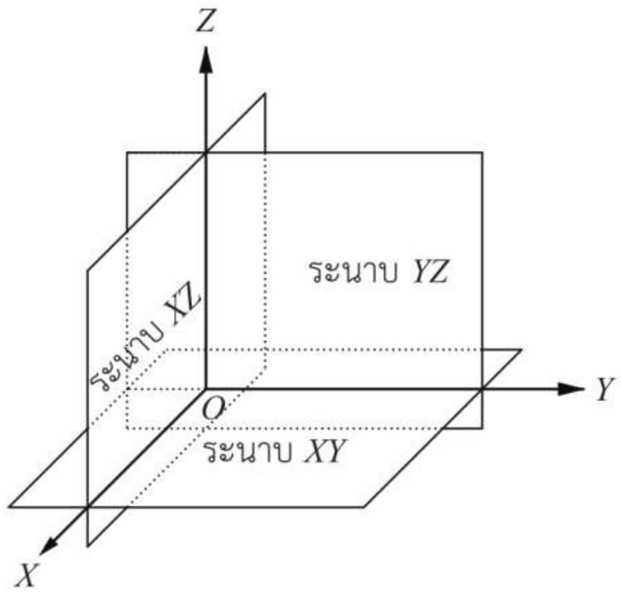
รูปที่ 22



รูปที่ 23

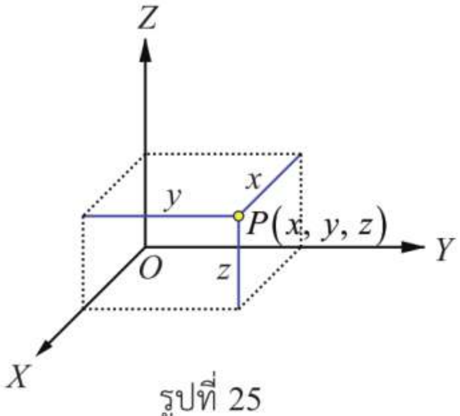
จากแกน X แกน Y และแกน Z จะกำหนดระนาบขึ้น 3 ระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง** เรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Y ว่า **ระนาบอ้างอิง** XY เรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน Y และแกน Z ว่า **ระนาบอ้างอิง** YZ และเรียกระนาบที่กำหนดด้วยแกน X และแกน Z ว่า **ระนาบอ้างอิง** XZ หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **ระนาบ** XY **ระนาบ** YZ และ **ระนาบ** XZ ตามลำดับ ดังรูปที่ 24

ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ ทั้งสามระนาบดังกล่าวจะแบ่งระบบพิกัดฉากสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ คือ เหนือระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า **อัฐภาค (octant)**



รูปที่ 24

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะสามารถระบุ**พิกัด (coordinate)** ของจุด P โดยใช้จำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันตามลำดับหรือเรียกว่า **สามสิ่งอันดับ (ordered triple)** ในรูป (x, y, z)



รูปที่ 25

เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X ทางบวก เป็นระยะ x หน่วย เมื่อ x เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ YZ ไปตามแนวแกน X ทางลบ เป็นระยะ $|x|$ หน่วย และเมื่อ x เป็น 0 แสดงว่าจุด P อยู่ในระนาบ YZ

เมื่อ y เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y ทางบวก เป็นระยะ y หน่วย เมื่อ y เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XZ ไปตามแนวแกน Y ทางลบ เป็นระยะ $|y|$ หน่วย และเมื่อ y เป็น 0 แสดงว่าจุด P อยู่ในระนาบ XZ

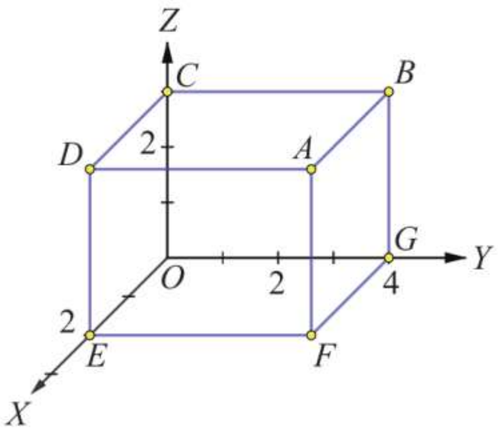
เมื่อ z เป็นจำนวนจริงบวก แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z ทางบวก เป็นระยะ z หน่วย เมื่อ z เป็นจำนวนจริงลบ แสดงว่าจุด P อยู่ห่างจากระนาบ XY ไปตามแนวแกน Z ทางลบ เป็นระยะ $|z|$ หน่วย และเมื่อ z เป็น 0 แสดงว่าจุด P อยู่ในระนาบ XY

บางครั้งจะเขียนจุดและพิกัดกำกับไว้ด้วยกันเป็น $P(x, y, z)$ ดังรูปที่ 25

ตัวอย่างที่ 10

จากรูป จงหาพิกัดของจุด A, B, C, D, E, F และ G

วิธีทำ



จากรูป

จุด A มีพิกัดเป็น $(2, 4, 3)$

จุด B มีพิกัดเป็น $(0, 4, 3)$

จุด C มีพิกัดเป็น $(0, 0, 3)$

จุด D มีพิกัดเป็น $(2, 0, 3)$

จุด E มีพิกัดเป็น $(2, 0, 0)$

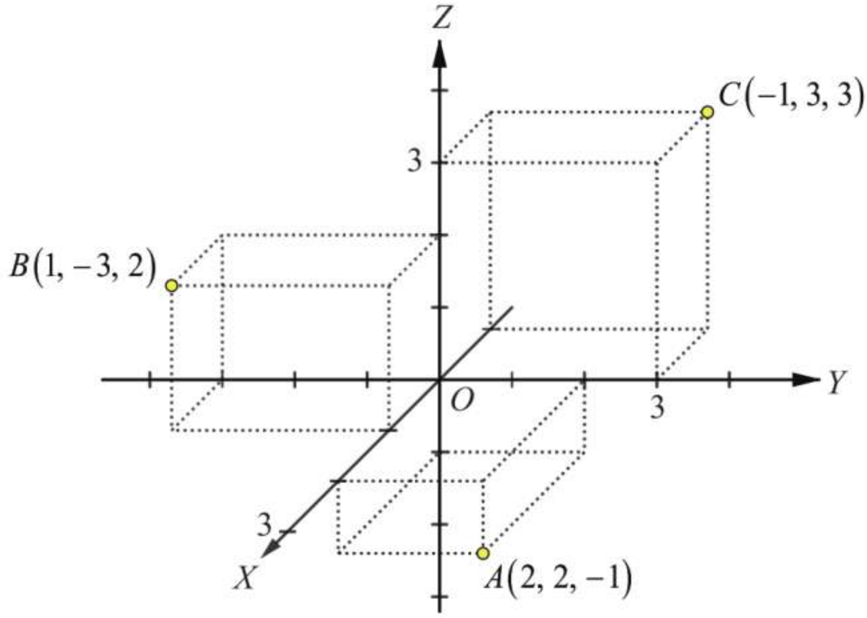
จุด F มีพิกัดเป็น $(2, 4, 0)$

และจุด G มีพิกัดเป็น $(0, 4, 0)$ ■

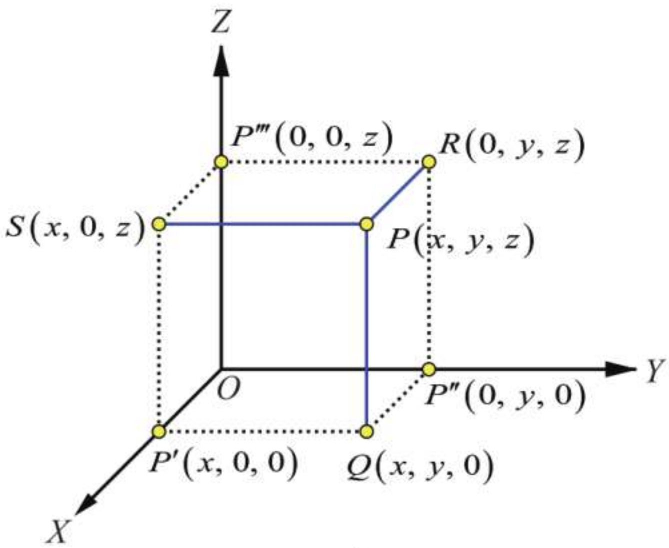
ตัวอย่างที่ 11

จงเขียนจุด $A(2, 2, -1)$, $B(1, -3, 2)$ และ $C(-1, 3, 3)$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

วิธีทำ



ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

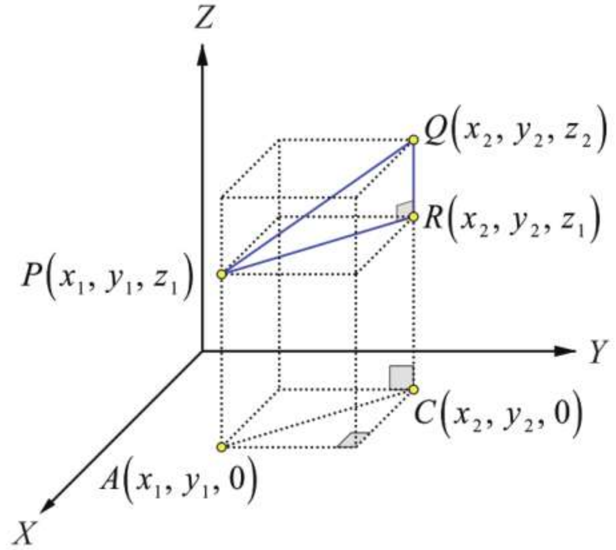


รูปที่ 26

จากรูปที่ 26 ถ้าลากเส้นผ่านจุด $P(x, y, z)$ ให้ขนานกับแกน Z ไปตัดระนาบ XY ได้จุดตัด $Q(x, y, 0)$ เรียกจุดนี้ว่าเป็น **ภาพฉาย (projection)** ของจุด P ในระนาบ XY ในทำนองเดียวกัน จะเรียกจุด $R(0, y, z)$ ว่าเป็นภาพฉายของจุด P ในระนาบ YZ และเรียกจุด $S(x, 0, z)$ ว่าเป็นภาพฉายของจุด P ในระนาบ XZ

และเรียกจุด $P'(x, 0, 0)$, $P''(0, y, 0)$ และ $P'''(0, 0, z)$ ว่าเป็นภาพฉายของจุด P บนแกน X แกน Y และแกน Z ตามลำดับ

การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติทำได้โดยใช้ภาพฉายของจุดทั้งสองในระนาบ XY และใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้



รูปที่ 27

ให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ เป็นจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ ให้จุด A และ C เป็นภาพฉายของจุด P และ Q ในระนาบ XY ตามลำดับ สร้างทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ดังรูปที่ 27 จะได้ PRQ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดในระนาบ XY จะได้ $AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

เนื่องจาก $PR = AC$ และ $QR = |z_2 - z_1|$

และ $PQ^2 = PR^2 + QR^2$

ดังนั้น $PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$

นั่นคือ ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

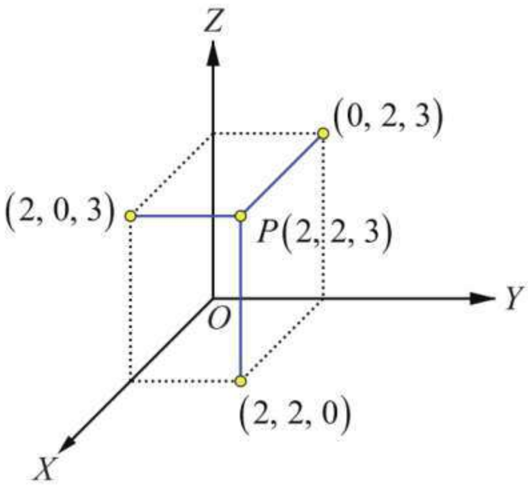
ทฤษฎีบท 1

ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ เท่ากับ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 12

จงหาภาพฉายของจุด $P(2, 2, 3)$ ในระนาบ XY, YZ และ XZ

วิธีทำ



จากรูป

ภาพฉายของจุด $P(2, 2, 3)$ ในระนาบ XY คือ จุด $(2, 2, 0)$

ภาพฉายของจุด $P(2, 2, 3)$ ในระนาบ YZ คือ จุด $(0, 2, 3)$

ภาพฉายของจุด $P(2, 2, 3)$ ในระนาบ XZ คือ จุด $(2, 0, 3)$

■

ตัวอย่างที่ 13

จงหาระยะทางระหว่างจุด $A(1, 0, 3)$ และ $B(-1, 3, 2)$

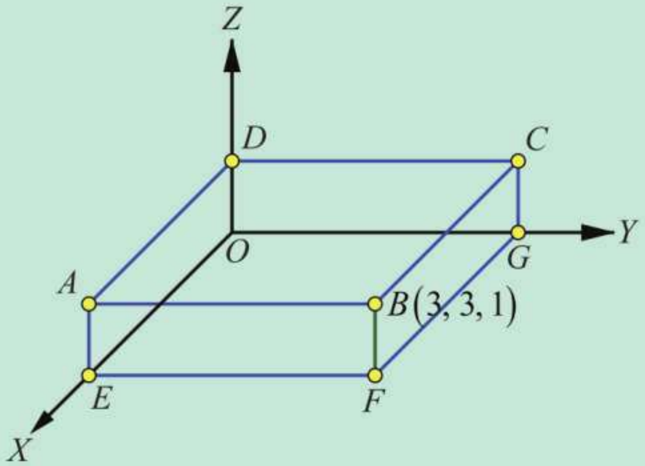
วิธีทำ จาก $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

จะได้
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(-1-1)^2+(3-0)^2+(2-3)^2} \\ &= \sqrt{4+9+1} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

■

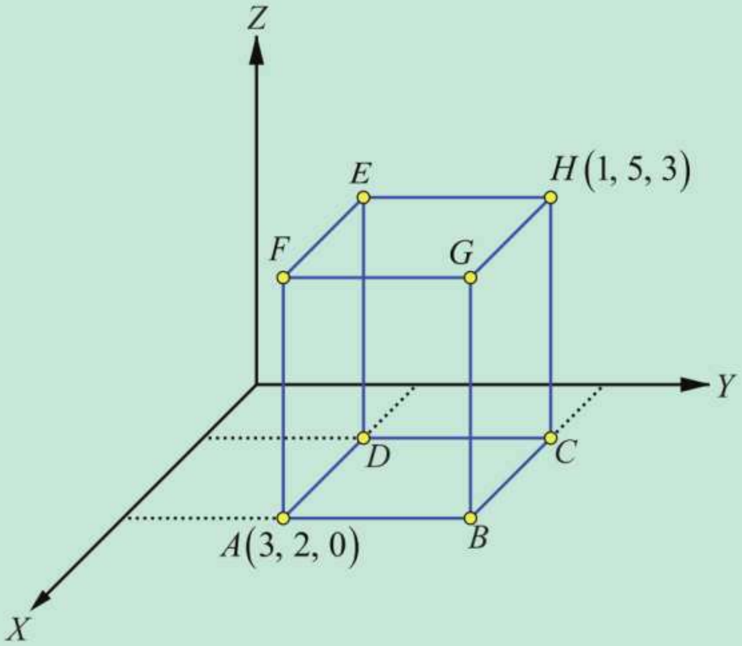
แบบฝึกหัด 3.2

1. จากรูป จงหาพิกัดซึ่งเป็นภาพฉายของจุด $B(3, 3, 1)$ บนแกนหรือในระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) บนแกน X
   2) บนแกน Y
   3) บนแกน Z
   4) ในระนาบ XY
   5) ในระนาบ YZ
   6) ในระนาบ XZ



2. จงหารูปทั่วไปของพิกัดของจุดที่อยู่บนแกนหรือในระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1) จุดบนแกน X
   2) จุดบนแกน Y
   3) จุดบนแกน Z
   4) จุดในระนาบ XY
   5) จุดในระนาบ YZ
   6) จุดในระนาบ XZ

3. จากรูป จงหาพิกัดของจุดยอดที่เหลือของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีหน้าทั้งหกหน้าขนานกับระนาบอ้างอิง



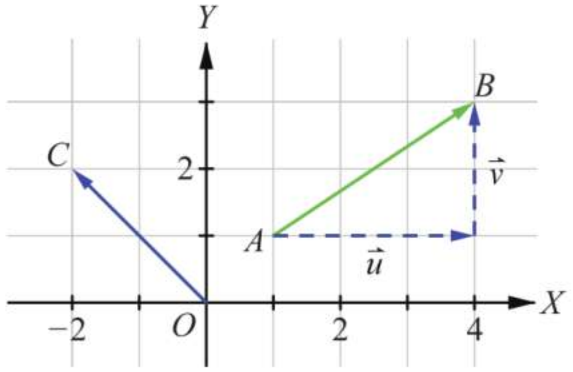
4. จงหาว่าส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด 2 จุด ของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากในข้อ 3 มีความยาวมากที่สุดเป็นเท่าใด

5. จงหาภาพฉายของจุด $P(3, -4, 8)$ และ $Q(7, -2, 8)$ ในระนาบ XY, YZ และ XZ และตรวจสอบว่าระยะทางระหว่างจุด P และ Q เท่ากับระยะทางของภาพฉายในระนาบใด

6. จงพิจารณาว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่จุด $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 7, 9)$ และ $C(11, 4, 2)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

3.3 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ



รูปที่ 28

จากรูปที่ 28 $\overrightarrow{AB}$ เป็นผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $\vec{u}$ มีขนาด 3 หน่วย และมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางบวก และ $\vec{v}$ มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางบวก

ในกรณีนี้จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ หรือ $[3,\ 2]$

(ในที่นี้จะใช้ $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$)

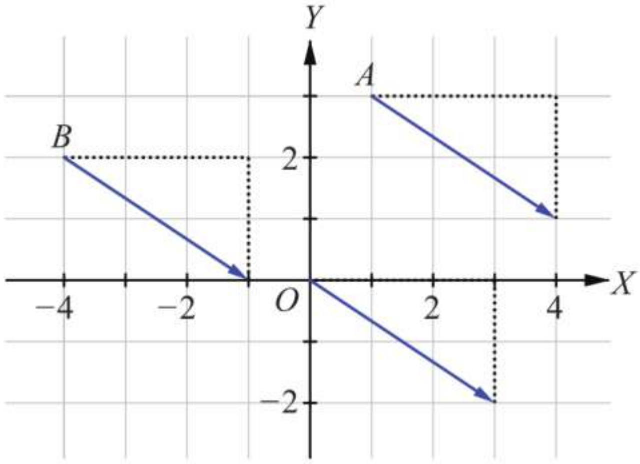
ส่วน $\overrightarrow{OC}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด $O(0,0)$ หรือจุดกำเนิด และ $\overrightarrow{OC}$ เป็นผลบวกของเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางลบ กับเวกเตอร์ที่มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางบวก เขียนแทน $\overrightarrow{OC}$ ด้วย $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ในกรณีทั่วไป เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะเขียน $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ซึ่งเป็นผลบวกของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ โดยที่เวกเตอร์แรกมีขนาด $|a|$ หน่วย ซึ่งถ้า $a>0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางบวก และถ้า $a<0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน X ทางลบ และเวกเตอร์ที่สองมีขนาด $|b|$ หน่วย ซึ่งถ้า $b>0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางบวก และถ้า $b<0$ แล้วเวกเตอร์นี้จะมีทิศทางไปตามแนวแกน Y ทางลบ

ตัวอย่างที่ 14

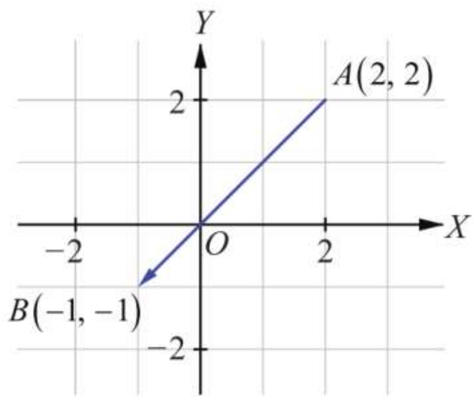
จงเขียนรูปแสดงเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ โดยมีจุดเริ่มต้นที่ $O(0, 0)$, $A(1, 3)$ และ $B(-4, 2)$

วิธีทำ



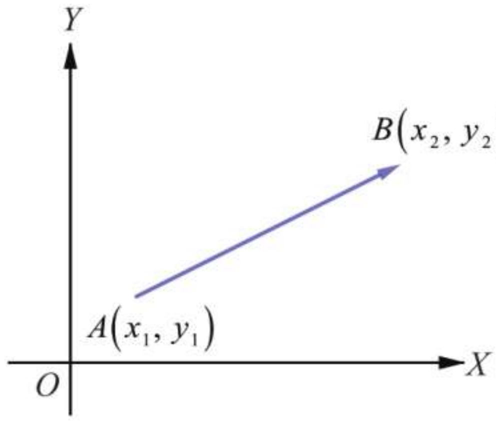
จะสังเกตได้ว่า ในเชิงเรขาคณิต เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ (a, b) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b)$

ถ้ากำหนด $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(2, 2)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(-1, -1)$ ดังรูปที่ 29 จะได้ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\begin{bmatrix} -1-2 \\ -1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix}$



รูปที่ 29

ในกรณีทั่วไป ถ้า $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ ดังรูปที่ 30 จะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และถ้าให้ $a = x_2 - x_1$ และ $b = y_2 - y_1$ แล้วจะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



รูปที่ 30

ตัวอย่างที่ 15

กำหนดให้ A มีพิกัดเป็น $(0,3)$ และ B มีพิกัดเป็น $(2,4)$ จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

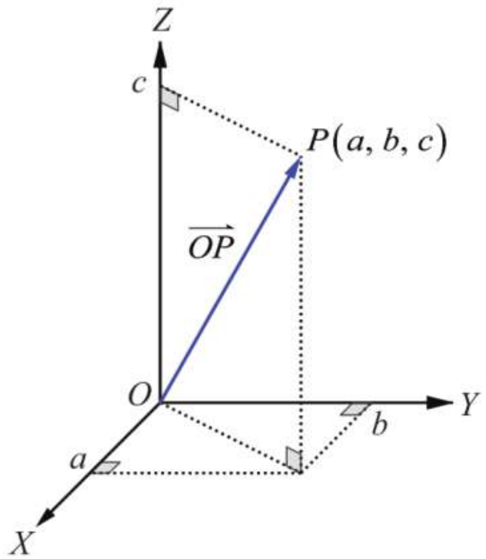
วิธีทำ จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-0 \\ 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

และ $\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ■

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จากที่กล่าวมาแล้วว่า เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติสามารถเขียนได้ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ซึ่งแทนเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิตที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ (a, b) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b)$ ต่อไปจะขยายแนวคิดจากเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติไปสู่เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยใช้ระบบพิกัดฉากสามมิติที่ได้ศึกษามาแล้ว ดังนี้

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ $P(a, b, c)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ดังรูปที่ 31



รูปที่ 31

ตัวอย่างที่ 16

จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดต่อไปนี้

1) $P(3, 1, -2)$

2) $Q(0, -2, 5)$

วิธีทำ 1) $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

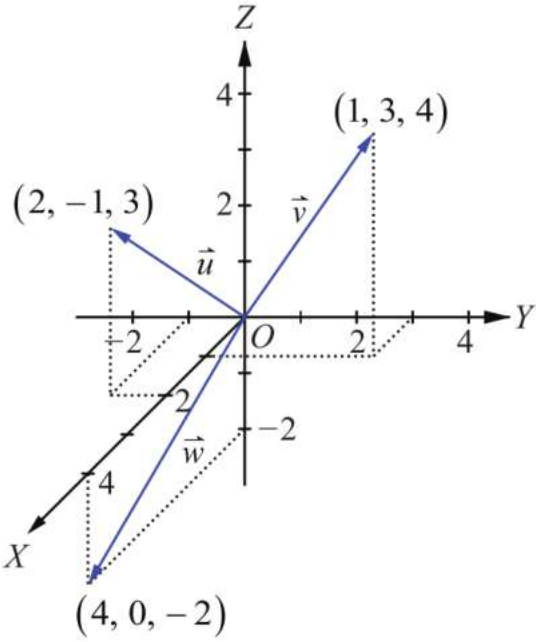
■

ตัวอย่างที่ 17

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในระบบพิกัดฉากสามมิติเดียวกัน โดยให้จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด

$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

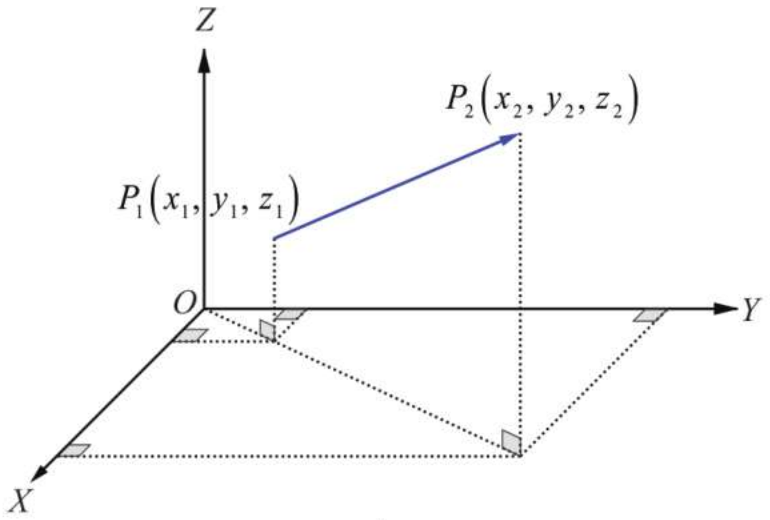
วิธีทำ เขียนเวกเตอร์โดยมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ได้ดังนี้



จากที่กล่าวมาข้างต้น ได้กล่าวถึงการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด ส่วนการกำหนดเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดอื่นที่ไม่ใช่จุดกำเนิด สามารถกำหนดได้ดังนี้

เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\overrightarrow{P_1P_2}$

หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ ดังรูปที่ 32



รูปที่ 32

ดังนั้น $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ (a, b, c) หรือมีจุดเริ่มต้นที่ (x, y, z) และจุดสิ้นสุดที่ $(x+a, y+b, z+c)$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนดให้ P มีพิกัดเป็น $(3, 4, -4)$ และ Q มีพิกัดเป็น $(5, 0, 7)$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$

วิธีทำ $$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 0-4 \\ 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 0-4 \\ 7+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$ ■

สำหรับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ การเท่ากันของเวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ สามารถสรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใด ๆ

	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สองมิติ	เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก สามมิติ
การเท่ากัน	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d, b = e$ และ $c = f$
นิเสธของเวกเตอร์	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$	นิเสธของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ คือ $-\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$
การบวกเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$
เวกเตอร์ศูนย์	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
การลบเวกเตอร์	$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$
การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ	$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่างที่ 19

กำหนดให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix}$ และ $\alpha=3$ จงหา $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, -\vec{v}$ และ $\alpha\vec{u}$

วิธีทำ

$$\vec{u}+\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+(-1)\\3+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-1\\3+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\7\end{bmatrix}$$

$$\vec{u}-\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-(-1)\\3-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+1\\3-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$-\vec{v} = (-1)\begin{bmatrix}-1\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-1)(-1)\\(-1)(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-4\end{bmatrix}$$

$$\alpha\vec{u} = 3\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(2)\\3(3)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\9\end{bmatrix}$$

■

ตัวอย่างที่ 20

กำหนดให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$ และ $\alpha=-\frac{1}{2}$ จงหา $\vec{u}+2\vec{v}, 3\vec{u}-\vec{v}, -\vec{u}$ และ $\alpha\vec{u}$

วิธีทำ

$$\vec{u}+2\vec{v} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2(3)\\2(4)\\2(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6\\8\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1+6\\2+8\\4+4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\10\\8\end{bmatrix}$$

$$3\vec{u}-\vec{v} = 3\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3(1)\\3(2)\\3(4)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\6\\12\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3-3\\6-4\\12-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\10\end{bmatrix}$$

$$-\vec{u} = (-1)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(-1)(1)\\(-1)(2)\\(-1)(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\-4\end{bmatrix}$$

$$\alpha\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\left(-\frac{1}{2}\right)(1)\\\left(-\frac{1}{2}\right)(2)\\\left(-\frac{1}{2}\right)(4)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\-2\end{bmatrix}$$ ■

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง k ที่ $k \neq 0$ ซึ่ง $\vec{u} = k\vec{v}$

ถ้า $k > 0$ แล้ว $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

ถ้า $k < 0$ แล้ว $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงข้ามกัน

ตัวอย่างที่ 21

จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางเดียวกัน และเวกเตอร์คู่ใดมีทิศทางตรงข้ามกัน

1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}1\\-5\\2\end{bmatrix}$

2) $\vec{u} = \begin{bmatrix}2\\-10\\4\end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{RS} = \begin{bmatrix}-3\\15\\-6\end{bmatrix}$

วิธีทำ จะเห็นว่า $\vec{u} = 2\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{RS} = -3\overrightarrow{PQ}$

ดังนั้น $\overrightarrow{PQ}$, $\vec{u}$ และ $\overrightarrow{RS}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกันทั้งหมด โดยที่ $\overrightarrow{PQ}$ มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{RS}$ ■

แบบฝึกหัด 3.3ก

1. ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(3, 4)$ จงหาพิกัดของจุด B ที่ทำให้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงเขียนเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}, 2\vec{u}, -\vec{v}$ และ $-\frac{1}{3}\vec{u}$ ในระบบพิกัดฉาก โดยให้จุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดกำเนิด

3. จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนดจุด A และ B ดังต่อไปนี้
   1) $A(0, 0), B(-1, 4)$
   2) $A(-2, 1), B(3, 2)$
   3) $A(-2, -8), B(-1, 2)$
   4) $A(1, 1, -1), B(0, 0, 0)$
   5) $A(7, 3, 1), B(-1, 8, 3)$
   6) $A(1, -1, 2), B(2, -1, 0)$

4. กำหนด $\vec{t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ จงหา
   1) $\vec{t} - 5\vec{u}$
   2) นิเสธของ $\vec{t} - 5\vec{u}$
   3) $2\vec{v} - \vec{w}$
   4) นิเสธของ $2\vec{v} - \vec{w}$

5. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ และ α, β เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงแสดงว่า
   1) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
   2) $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
   3) $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}$
   4) $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
   5) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

6. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

1) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-8\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-4\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}$

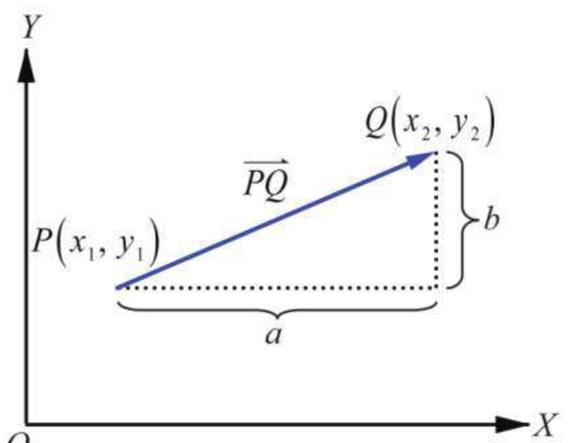
7. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

1) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P(1, 2, 3)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(-1, 8, 11)$

2) $\vec{u} = \begin{bmatrix}-3\\9\\12\end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{OR}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ $R(1, -3, -4)$

ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ



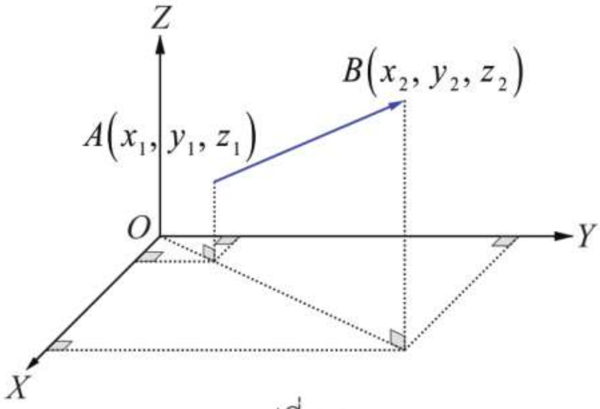
รูปที่ 33

ถ้า $\overrightarrow{PQ}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ P มีพิกัดเป็น (x_1, y_1) และ Q มีพิกัดเป็น (x_2, y_2) ดังรูปที่ 33 จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}x_2 - x_1\\y_2 - y_1\end{bmatrix}$

และ $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ถ้าให้ $a = x_2 - x_1$ และ $b = y_2 - y_1$ แล้ว

จะได้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย



รูปที่ 34

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ A มีพิกัดเป็น (x_1, y_1, z_1) และ B มีพิกัดเป็น (x_2, y_2, z_2) ดังรูปที่ 34

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ และ

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ถ้าให้ $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1$ และ $c = z_2 - z_1$ แล้ว จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และขนาดของ $\overrightarrow{AB}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ หน่วย

ตัวอย่างที่ 22

จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P มีพิกัดเป็น $(2, 1, 0)$ และ Q มีพิกัดเป็น $(-1, 1, 0)$

วิธีทำ 1) $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

2) $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$ ■

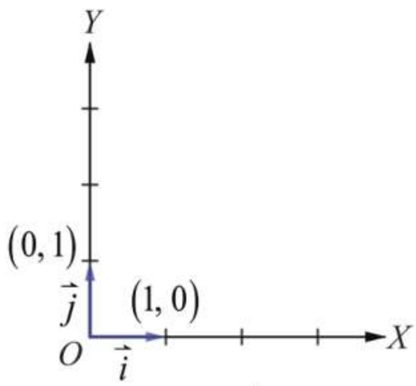
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ

บทนิยาม 9

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)**

เนื่องจากเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ จะมีขนาด $\sqrt{a^2+b^2}$ หน่วย ดังนั้น เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใด ๆ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

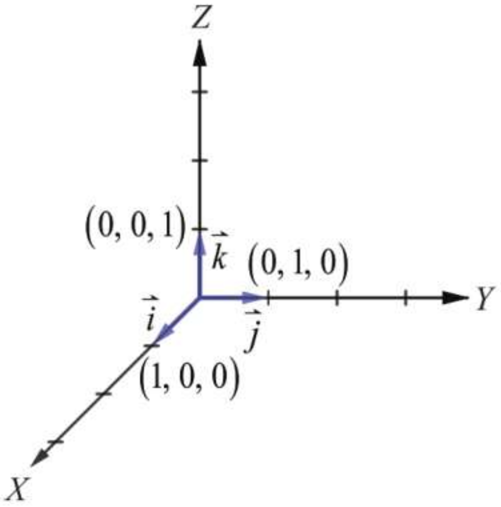
ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$



รูปที่ 35

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ เพื่อความสะดวกจึงแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$ ดังรูปที่ 35

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติที่สำคัญ คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{k}$ ดังรูปที่ 36



รูปที่ 36

ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ได้ดังนี้

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สามารถเขียน $\vec{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$ ได้ดังนี้

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

หมายเหตุ เนื่องจาก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ หน่วย

ดังนั้น $\left|a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ตัวอย่างที่ 23

กำหนด $\overrightarrow{P_1P_2}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(2, -3)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(-4, 6)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{bmatrix} -4-2 \\ 6-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix}$

และ $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 9^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ

$$\frac{1}{3\sqrt{13}}\begin{bmatrix} -6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2\sqrt{13}}{13} \\ \frac{3\sqrt{13}}{13} \end{bmatrix} = \frac{-2\sqrt{13}}{13}\vec{i} + \frac{3\sqrt{13}}{13}\vec{j}$$

■

ตัวอย่างที่ 24

กำหนด $\overrightarrow{P_1P_2}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(1, 2, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ $P_2(-2, 3, 1)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ในรูปของ $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

วิธีทำ เวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ $\overrightarrow{P_2P_1} = \begin{bmatrix} 1-(-2) \\ 2-3 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

และ $\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11}$

จะได้ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_2P_1}$ คือ

$$\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}}{11} \\ \frac{-\sqrt{11}}{11} \end{bmatrix} = \frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{i} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{j} - \frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}$$

ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ คือ เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_2P_1}$ ซึ่งคือ $\frac{3\sqrt{11}}{11}\vec{i}-\frac{\sqrt{11}}{11}\vec{j}-\frac{\sqrt{11}}{11}\vec{k}$ ■

แบบฝึกหัด 3.3ข

1. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ในกรณีที่เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเขียนในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ในกรณีที่เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
   1) $\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากสองมิติ
   2) $\overrightarrow{OS}=\begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิดในระบบพิกัดฉากสามมิติ
   3) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่จุด A และ B มีพิกัดเป็น $(3, 2)$ และ $(-4, 1)$ ตามลำดับ
   4) $\overrightarrow{CD}$ โดยที่จุด C และ D มีพิกัดเป็น $(-3, 4)$ และ $(1, -2)$ ตามลำดับ
   5) $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่จุด P และ Q มีพิกัดเป็น $(1, -1, 2)$ และ $(3, 2, 6)$ ตามลำดับ
   6) $\overrightarrow{MN}$ โดยที่จุด M และ N มีพิกัดเป็น $(0, 1, 1)$ และ $(-1, -1, 2)$ ตามลำดับ

2. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้
   1) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$
   2) $\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\-1\end{bmatrix}$
   3) $\overrightarrow{AB}$ เมื่อพิกัดของจุด A และ B คือ $(1, 2)$ และ $(5, 7)$ ตามลำดับ
   4) $\overrightarrow{RS}$ เมื่อพิกัดของจุด R และ S คือ $(7, 4, 1)$ และ $(-1, 3, 5)$ ตามลำดับ

3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ โดยเขียนในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ในกรณีที่เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเขียนในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ในกรณีที่เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

3) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่จุด A และ B มีพิกัดเป็น $(1, -3)$ และ $(-4, 5)$ ตามลำดับ

4) $\overrightarrow{CD}$ โดยที่จุด C และ D มีพิกัดเป็น $(1, 5, 8)$ และ $(0, -3, 1)$ ตามลำดับ

4. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในข้อ 3

3.4 ผลคูณเชิงสเกลาร์

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 10

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นสเกลาร์ **ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product)** ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ กำหนดดังนี้

1. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ
   จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2$
2. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ
   จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ดอท เวกเตอร์วี

ตัวอย่างที่ 25

ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right) \cdot \left(-3\vec{i} + 4\vec{j}\right) \\ &= 2(-3) + 3(4) \\ &= -6 + 12 \\ &= 6 \end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 26

ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= 4(1) + 1(-2) + (-2)(-3) \\ &= 4 - 2 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

■

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์ มีดังนี้

ทฤษฎีบท 2

ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$
2. $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}\cdot\vec{v})+(\vec{u}\cdot\vec{w})$ และ $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=(\vec{u}\cdot\vec{w})+(\vec{v}\cdot\vec{w})$
3. $a(\vec{u}\cdot\vec{v})=(a\vec{u})\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot(a\vec{v})$
4. $\vec{0}\cdot\vec{u}=0$
5. $\vec{u}\cdot\vec{u}=|\vec{u}|^2$
6. $\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$ และ $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{j}\cdot\vec{k}=0$

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เพียงข้อ 1 และข้อ 5

พิสูจน์ 1. ให้ $\vec{u}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}$ และ $\vec{v}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1b_1+a_2b_2$ และ $\vec{v}\cdot\vec{u}=b_1a_1+b_2a_2$

โดยสมบัติการสลับที่ของการคูณของจำนวนจริง จะได้ $a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2$

ดังนั้น $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$

กรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

5. ให้ $\vec{u}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{u}\cdot\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$= a^2+b^2+c^2$$

$$= \left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right)^2$$

$$= |\vec{u}|^2$$

กรณีที่ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติสามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

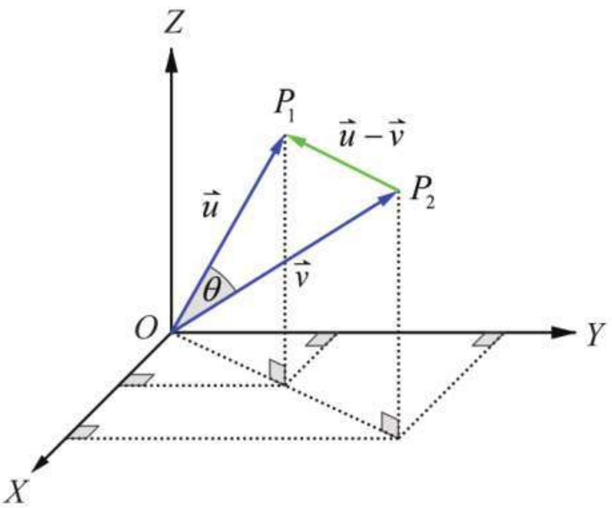
ทฤษฎีบท 3

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$ (มุมระหว่างเวกเตอร์ หมายถึง มุมที่ไม่ใช่มุมกลับ ซึ่งมีแขนของมุมเป็นรังสีที่ขนานและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง) จะได้ว่า

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

กำหนดจุด P_1 และ P_2 ที่ทำให้ $\vec{u} = \overrightarrow{OP_1}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{OP_2}$ ดังรูป



จะได้ $\overrightarrow{P_2P_1} = \vec{u} - \vec{v}$

พิจารณารูปสามเหลี่ยม OP_1P_2 จากกฎของโคไซน์ จะได้ว่า

$$P_2P_1^{\ 2} = OP_1^{\ 2} + OP_2^{\ 2} - 2(OP_1)(OP_2)\cos\theta$$

นั่นคือ $\left|\overrightarrow{P_2P_1}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OP_2}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{OP_1}\right|\left|\overrightarrow{OP_2}\right|\cos\theta$

ดังนั้น $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า $\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

แต่เนื่องจาก $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - 2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)$$

จะได้ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ดังนั้น $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

หมายเหตุ เพื่อความสะดวก จะถือว่าเวกเตอร์ศูนย์ตั้งฉากกับทุกเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 4

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ จะได้ว่า

$\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ

สมมติว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จะแสดงว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ถ้า $\vec{u}$ หรือ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

ซึ่ง $0^\circ\le\theta\le180^\circ$

เนื่องจาก $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จะได้ว่า $\theta=90^\circ$

ดังนั้น $\cos\theta=0$

จะได้ว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

สมมติว่า $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ จะแสดงว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ถ้า $\vec{u}$ หรือ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ศูนย์ จะได้ว่า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ต่อไปพิจารณากรณีที่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

เนื่องจาก $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ\le\theta\le180^\circ$

ดังนั้น $|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=0$

เนื่องจาก $|\vec{u}|\ne0$ และ $|\vec{v}|\ne0$ จะได้ว่า $\cos\theta=0$

นั่นคือ $\theta=90^\circ$

ดังนั้น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

นั่นคือ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

ตัวอย่างที่ 27

จงหาโคไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เมื่อ

1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

จากทฤษฎีบท 3 จะได้ว่า $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

เนื่องจาก $|\vec{u}| \ne 0$ และ $|\vec{v}| \ne 0$ ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

1) เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(2) + 3(1) = 4 + 3 = 7$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{65}}{65}$

2) เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = (-4)(2) + 2(7) + 4(-1) = -8 + 14 - 4 = 2$

และ $|\vec{u}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+49+1} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$

ดังนั้น $\cos\theta = \dfrac{2}{6(3\sqrt{6})} = \dfrac{\sqrt{6}}{54}$ ■

ตัวอย่างที่ 28

จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(4, 9, 1)$, $B(-2, 6, 3)$ และ $C(6, 3, -2)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

วิธีทำ เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-4 \\ 6-9 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

และ $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 6-4 \\ 3-9 \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$

จะได้
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix} \\ &= (-6)(2) + (-3)(-6) + 2(-3) \\ &= -12 + 18 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

จากทฤษฎีบท 4 จะได้ว่า $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$

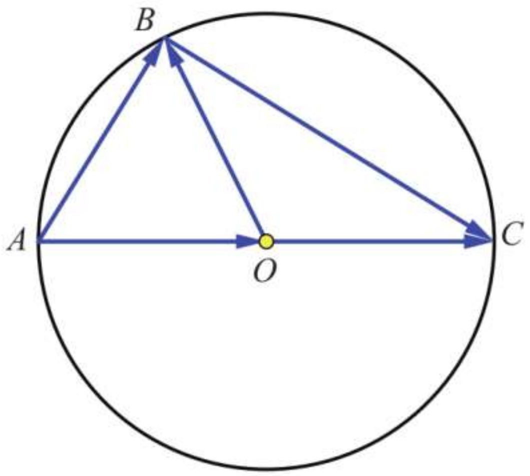
ดังนั้น รูปสามเหลี่ยมดังกล่าวเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ■

ตัวอย่างที่ 29

จงแสดงว่ามุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา โดยใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์

วิธีทำ ให้จุด O เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม และ $A\hat{B}C$ เป็นมุมในครึ่งวงกลม ดังรูป

จะแสดงว่า $A\hat{B}C = 90^\circ$



จากรูป จะได้ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ และ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ดังนั้น $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}$

จะได้

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right) \cdot \left(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB}\right) \\
&= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} \\
&= \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB} \\
&= \left|\overrightarrow{AO}\right|^2 - \left|\overrightarrow{OB}\right|^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

(เนื่องจาก $\left|\overrightarrow{AO}\right|$ และ $\left|\overrightarrow{OB}\right|$ เป็นความยาวของรัศมีของวงกลม)

ดังนั้น $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{BC}$

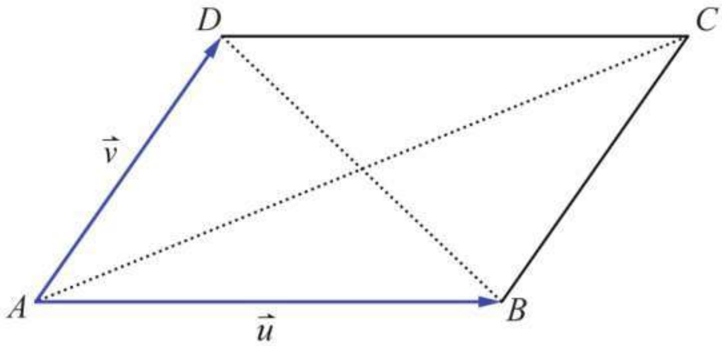
นั่นคือ $A\hat{B}C = 90^\circ$

ดังนั้น มุมในครึ่งวงกลมมีขนาด 90 องศา ■

ตัวอย่างที่ 30

จงแสดงว่าในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ผลบวกของกำลังสองของความยาวของเส้นทแยงมุมเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านทุกด้าน

วิธีทำ กำหนด $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$ ดังรูป



จะแสดงว่า $AC^2 + DB^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$

เนื่องจาก $\overrightarrow{BC} = \vec{v}, \overrightarrow{CD} = -\vec{u}, \overrightarrow{DA} = -\vec{v}$ และ $\overrightarrow{AC} = \vec{u} + \vec{v}, \ \overrightarrow{DB} = \vec{u} - \vec{v}$

ดังนั้น $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + |-\vec{u}|^2 + |-\vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

และ $AC^2 + DB^2 = |\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2$

จะแสดงว่า $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}|\vec{u} + \vec{v}|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}|\vec{u} - \vec{v}|^2 &= (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= |\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2 + |\vec{u}|^2 - 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |\vec{v}|^2 \\ &= 2|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2\end{aligned}$$

นั่นคือ ในรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ผลบวกของกำลังสองของความยาวของเส้นทแยงมุมเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านทุกด้าน ■

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหา $\vec{u}\cdot\vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้
   1) $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$ และ $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$
   2) $\vec{u}=2\vec{i}+5\vec{j}$ และ $\vec{v}=\vec{j}$
   3) $\vec{u}=-\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{k}$
   4) $\vec{u}=-\vec{i}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=3\vec{i}+\vec{j}$

2. จงหาขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์ต่อไปนี้
   1) $\vec{u}=3\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{v}=9\vec{i}+6\vec{j}$
   2) $\vec{u}=3\vec{i}+\vec{j}$ และ $\vec{v}=-2\vec{i}+\vec{j}$
   3) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}$
   4) $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$

3. กำหนด $\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$ และ $\vec{w}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ จงหา
   1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
   3) $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
   4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

4. กำหนด $\vec{u}=\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}$ และ $\vec{w}=\begin{bmatrix}6\\-3\\0\end{bmatrix}$ จงหา
   1) $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$
   2) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
   3) $\vec{v}\cdot(\vec{u}+\vec{v})$
   4) $(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})$

5. ให้ $\vec{u}\neq\vec{0}, \vec{v}\neq\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ จงพิจารณาว่ามุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นมุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน ถ้า
   1) $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$
   2) $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$
   3) $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$

6. เวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

    1) $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}$
    2) $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$
    3) $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$
    4) $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$

7. จงหาค่าของ m เมื่อกำหนด $\vec{u}=(1-m)\vec{i}+2\vec{j}$ และ $\vec{v}=m\vec{i}+(m+2)\vec{j}$ โดยที่

    1) $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$
    2) $\vec{u}$ มีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$

8. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ จงแสดงว่า

    1) $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
    2) $|\vec{u}-\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$

9. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 3$ และ $|\vec{u}+\vec{v}| = 4$ แล้ว จงหา $|\vec{u}-\vec{v}|$

10. กำหนด $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+3\vec{j}$ และ $\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{j}$ ถ้าลากส่วนของเส้นตรงจากจุด A ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด C แล้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม OAC

11. กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ถ้า A, B, C และ D มีพิกัดเป็น $(7,8), (5,9), (11,11)$ และ $(13,10)$ ตามลำดับ แล้ว จงหาขนาดของมุมภายในทุกมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$

12. ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $|\vec{u}|=|\vec{v}|=1, |\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{3}$ และ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=\vec{0}$ แล้ว จงหาขนาดของ $\vec{w}$

13. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยที่ด้าน AC เป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก จงแสดงว่า $AB^2+BC^2=AC^2$ (พิสูจน์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส)

14. จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนตัดกันเป็นมุมฉาก

3.5 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงผลคูณเชิงสเกลาร์ซึ่งเป็นการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคูณระหว่างเวกเตอร์สองเวกเตอร์อีกแบบหนึ่งที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ ซึ่งจะกล่าวถึงเฉพาะเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 11

ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (cross product) ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$

กำหนดโดย $\vec{u} \times \vec{v} = \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}$

$\vec{u} \times \vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี

หมายเหตุ นิยมเขียนผลลัพธ์ของ $\vec{u} \times \vec{v}$ ในรูปของดีเทอร์มิแนนต์ ดังนี้

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k} \quad \text{(โดยการกระจายตามแถวที่ 1)}$$

$$= \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\vec{i} - \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\vec{j} + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\vec{k}$$

ทฤษฎีบท 5

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ว่า
$\vec{u}\times\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และมีขนาดเป็น $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$
เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จะได้ $\vec{u}\times\vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

พิจารณา
$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) &= a_1(a_2b_3 - a_3b_2) - a_2(a_1b_3 - a_3b_1) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)\\ &= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 - a_2a_1b_3 + a_2a_3b_1 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1\\ &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}\times\vec{v}$

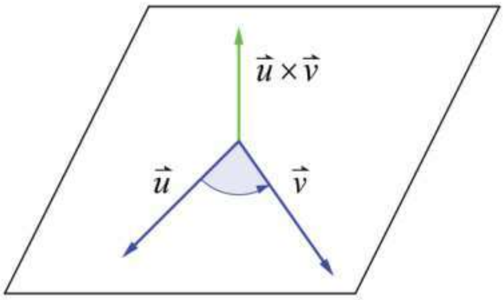
ในทำนองเดียวกัน สามารถแสดงได้ว่า $\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}\times\vec{v}$

และ
$$\begin{aligned}|\vec{u}\times\vec{v}|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2\\ &= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 - 2a_1a_3b_1b_3\\ &\quad + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2\\ &= (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2\\ &\quad - (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2) - 2a_2a_3b_2b_3 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_1a_2b_1b_2\\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2\\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}\cdot\vec{v}|^2\\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta\\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1 - \cos^2\theta)\\ &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\theta\end{aligned}$$

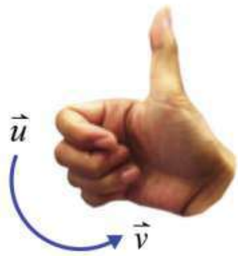
แต่ $\sin\theta \geq 0$ เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

ดังนั้น $\left|\vec{u}\times\vec{v}\right| = \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right|\sin\theta$

จากทฤษฎีบท 5 สรุปได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
สามารถแสดงทิศทางของ $\vec{u}\times\vec{v}$ โดยใช้กฎมือขวา ดังรูปที่ 37 และ 38

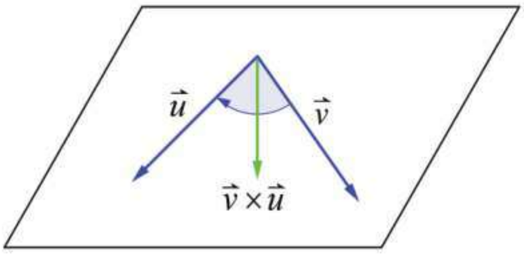


รูปที่ 37

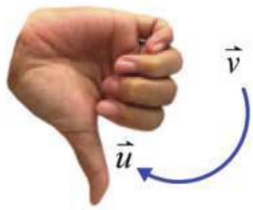


รูปที่ 38

และสามารถแสดงทิศทางของ $\vec{v}\times\vec{u}$ โดยใช้กฎมือขวา ดังรูปที่ 39 และ 40



รูปที่ 39



รูปที่ 40

สังเกตว่า ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่าน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และมีทิศทางตรงข้ามกัน ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v} = -\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$

ตัวอย่างที่ 31

ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left(0(4)-3(3)\right)\vec{i} - \left((-1)(4)-3(1)\right)\vec{j} + \left((-1)(3)-0(1)\right)\vec{k} \\
&= (0-9)\vec{i} - (-4-3)\vec{j} + (-3-0)\vec{k} \\
&= -9\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 32

จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ เมื่อกำหนด

1) $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - 5\vec{j}$
2) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$

วิธีทำ 1)

$$\begin{aligned}
\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -5 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left((-3)(0)-0(-5)\right)\vec{i} - \left(2(0)-0(1)\right)\vec{j} + \left(2(-5)-(-3)(1)\right)\vec{k} \\
&= -7\vec{k}
\end{aligned}$$

2) $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \big(0(5)-3(0)\big)\vec{i} - \big(2(5)-3(1)\big)\vec{j} + \big(2(0)-0(1)\big)\vec{k}$$

$$= -7\vec{j}$$

ตัวอย่างที่ 33

จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1) $\vec{i}\times\vec{j}$

2) $\vec{j}\times\vec{i}$

3) $\vec{i}\times\vec{i}$

วิธีทำ 1) $\vec{i}\times\vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \big(0(0)-0(1)\big)\vec{i} - \big(1(0)-0(0)\big)\vec{j} + \big(1(1)-0(0)\big)\vec{k}$$

$$= \vec{k}$$

2) $\vec{j}\times\vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

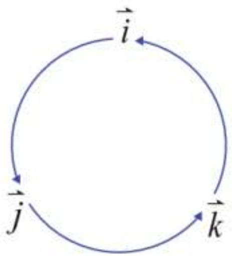
$$= \big(1(0)-0(0)\big)\vec{i} - \big(0(0)-0(1)\big)\vec{j} + \big(0(0)-1(1)\big)\vec{k}$$

$$= -\vec{k}$$

3) $$\begin{aligned} \vec{i}\times\vec{i} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\ &= \big(0(0)-0(0)\big)\vec{i} - \big(1(0)-0(1)\big)\vec{j} + \big(1(0)-0(1)\big)\vec{k} \\ &= \vec{0} \end{aligned}$$ ■

จากการคำนวณเช่นเดียวกับในตัวอย่างที่ 33 จะพบว่า การคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกเตอร์หนึ่งหน่วยสอดคล้องกับสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}, \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ และ $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ ซึ่งเขียนแผนภาพช่วยจำได้ดังรูป



2. $\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}, \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$ และ $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$
3. $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{0}, \vec{j}\times\vec{j}=\vec{0}$ และ $\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$

ทฤษฎีบท 6

กำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
2. $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\times\vec{w}) + (\vec{v}\times\vec{w})$
3. $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$
4. $\vec{u}\times(\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
5. $(\alpha\vec{u})\times\vec{v} = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$
6. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เพียงข้อ 1 และข้อ 5

พิสูจน์ ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ และ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. จะได้ $\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

และ $\vec{v}\times\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$

$$= (b_2a_3 - b_3a_2)\vec{i} - (b_1a_3 - b_3a_1)\vec{j} + (b_1a_2 - b_2a_1)\vec{k}$$

นั่นคือ $-(\vec{v}\times\vec{u}) = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

ดังนั้น $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$

จากทฤษฎีบท 6 ข้อ 1 จะเห็นว่า $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน

5. จะได้ $\alpha\vec{u} = \alpha\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{bmatrix}$

และ $(\alpha\vec{u})\times\vec{v}$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \alpha a_1 & \alpha a_2 & \alpha a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left((\alpha a_2)b_3 - (\alpha a_3)b_2\right)\vec{i} - \left((\alpha a_1)b_3 - (\alpha a_3)b_1\right)\vec{j} + \left((\alpha a_1)b_2 - (\alpha a_2)b_1\right)\vec{k}$$

$$= \left(\alpha(a_2b_3) - \alpha(a_3b_2)\right)\vec{i} - \left(\alpha(a_1b_3) - \alpha(a_3b_1)\right)\vec{j} + \left(\alpha(a_1b_2) - \alpha(a_2b_1)\right)\vec{k}$$

$$= \alpha(a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - \alpha(a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + \alpha(a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

$$= \alpha\left((a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}\right)$$

$$= \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$$

ดังนั้น $(\alpha\vec{u})\times\vec{v} = \alpha(\vec{u}\times\vec{v})$

ตัวอย่างที่ 34

จงหา $(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\times(2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})$

วิธีทำ $(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\times(2\vec{i}-\vec{j}-3\vec{k})$

$$= 2(\vec{i}\times\vec{i}) - (\vec{i}\times\vec{j}) - 3(\vec{i}\times\vec{k}) + 2(\vec{j}\times\vec{i}) - (\vec{j}\times\vec{j}) - 3(\vec{j}\times\vec{k})$$
$$+4(\vec{k}\times\vec{i}) - 2(\vec{k}\times\vec{j}) - 6(\vec{k}\times\vec{k})$$

$$= 2(\vec{0}) - \vec{k} + 3\vec{j} - 2\vec{k} - 1(\vec{0}) - 3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{i} - 6(\vec{0})$$

$$= -\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$$

■

ตัวอย่างที่ 35

กำหนด $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ จงหาค่าของ $\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= \big((-1)(1) - 0(1)\big)\vec{i} - \big(2(1) - 0(2)\big)\vec{j} + \big(2(1) - (-1)(2)\big)\vec{k}$$

$$= -\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{4+1+0} = \sqrt{5}$$

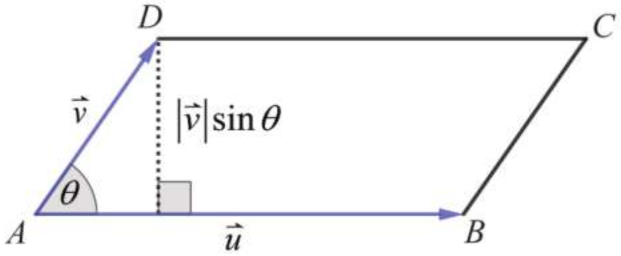
$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

เนื่องจาก $|\vec{u}| \neq 0, |\vec{v}| \neq 0$ และ $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ จะได้ว่า $\sin\theta = \dfrac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

ดังนั้น $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{21}{30}} = \sqrt{\dfrac{7}{10}} = \dfrac{\sqrt{70}}{10}$ ■

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}, \vec{v} = \overrightarrow{AD}$ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะได้ว่า $|\vec{v}|\sin\theta$ เป็นส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป



รูปที่ 43

ดังนั้น $|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านที่ไม่ขนานกันยาว $|\vec{u}|$ และ $|\vec{v}|$ หน่วย แต่เนื่องจาก $|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$ ดังนั้น $|\vec{u}\times\vec{v}|$ คือ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานดังกล่าว

นอกจากนี้ จะได้ว่า พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABD เท่ากับ $\frac{1}{2}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$

ตัวอย่างที่ 36

จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เมื่อ $\overrightarrow{AB} = \vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ และ $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เท่ากับ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|$

เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \left(3(1)-4(-2)\right)\vec{i} - \left(1(1)-4(3)\right)\vec{j} + \left(1(-2)-3(3)\right)\vec{k} \\
&= 11\vec{i}+11\vec{j}-11\vec{k}
\end{aligned}$$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{11^2+11^2+(-11)^2} = \sqrt{121+121+121} = 11\sqrt{3}$

ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ มีพื้นที่ $11\sqrt{3}$ ตารางหน่วย ■

ตัวอย่างที่ 37

จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(1, -1, 3)$, $B(2, 3, -2)$ และ $C(1, 1, 5)$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 3-(-1) \\ -2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

และ $\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 1-(-1) \\ 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\vec{j} + 2\vec{k}$

ดังนั้น

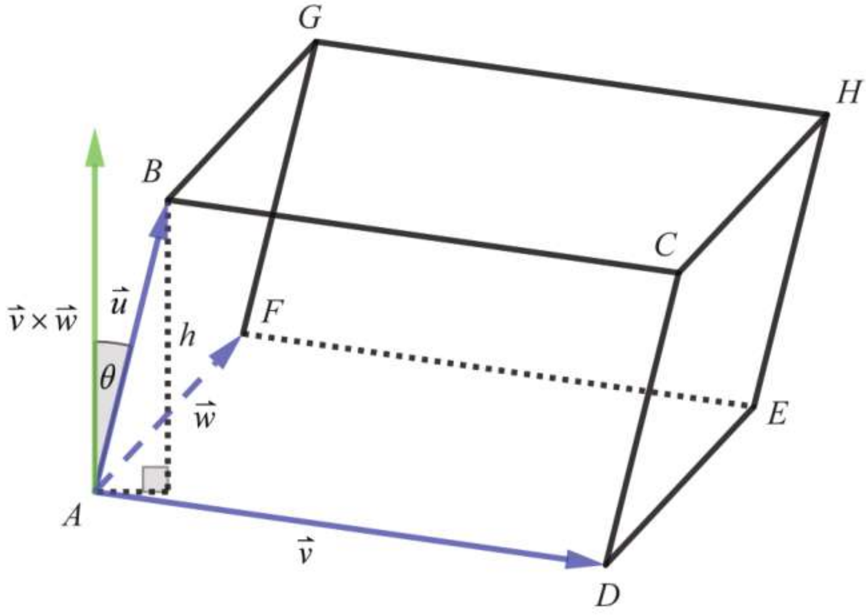
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \big(4(2)-(-5)(2)\big)\vec{i} - \big(1(2)-(-5)(0)\big)\vec{j} + \big(1(2)-4(0)\big)\vec{k} \\
&= 18\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}
\end{aligned}$$

จะได้ $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{18^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{324+4+4} = \sqrt{332} = 2\sqrt{83}$

ดังนั้น รูปสามเหลี่ยม ABC มีพื้นที่ $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{83}\right) = \sqrt{83}$ ตารางหน่วย ■

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCDEFGH$ ให้ $\vec{u}=\overrightarrow{AB}, \vec{v}=\overrightarrow{AD}, \vec{w}=\overrightarrow{AF}$ และ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}\times\vec{w}$ ในที่นี้จะพิจารณารูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ADEF$ เป็นฐาน และ h เป็นความสูง จะได้ว่า $h=|\vec{u}||\cos\theta|$ ดังรูป



รูปที่ 44

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$\begin{aligned}|\vec{u}||\cos\theta||\vec{v}\times\vec{w}| &= |\vec{u}||\vec{v}\times\vec{w}||\cos\theta| \\ &= |\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|\end{aligned}$$

(เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนจริงลบ)

หมายเหตุ ในการเลือกลำดับของด้านประกอบของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานไม่มีผลต่อปริมาตรที่หาได้ กล่าวคือ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|=|\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})|=|\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v})|$$

ตัวอย่างที่ 38

จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCDEFGH$ โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$

วิธีทำ เนื่องจากปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$

$$\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} \\
&= \big(1(1)-1(0)\big)\vec{i} - \big(0(1)-1(1)\big)\vec{j} + \big(0(0)-1(1)\big)\vec{k} \\
&= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}
\end{aligned}$$

จะได้

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})| &= \left|(\vec{i} + \vec{j}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})\right| \\
&= |1(1) + 1(1) + 0(-1)| \\
&= |2| \\
&= 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานนี้มีปริมาตร 2 ลูกบาศก์หน่วย ■

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหา

1) $\vec{j}\times\vec{k}$
2) $\vec{k}\times\vec{i}$
3) $\vec{k}\times\vec{j}$
4) $\vec{i}\times\vec{k}$
5) $\vec{j}\times\vec{j}$
6) $\vec{k}\times\vec{k}$

2. จงหา $\vec{u}\times\vec{v}$ และ $\vec{v}\times\vec{u}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้

1) $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$
2) $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{j}$
3) $\vec{u}=\begin{bmatrix}2\\7\\0\end{bmatrix}$ และ $\vec{v}=\begin{bmatrix}5\\4\\-3\end{bmatrix}$

3. ให้ $\vec{u}=5\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$ และ $\vec{v}=\vec{j}-\vec{k}$ จงหา

1) $\vec{u}\times\vec{v}$
2) $|\vec{u}\times\vec{v}|$
3) ไซน์ของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

4. ให้ $\vec{u},\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จงแสดงว่า
$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

5. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จงแสดงว่า
$(\vec{u}-\vec{v})\times(\vec{u}+\vec{v}) = (2\vec{u})\times\vec{v}$

6. ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จงพิจารณาว่าการคูณเวกเตอร์ในแต่ละข้อต่อไปนี้สามารถทำได้หรือไม่ ถ้าทำได้ จะมีผลลัพธ์เป็นปริมาณเวกเตอร์หรือปริมาณสเกลาร์

   1) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$
   2) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$
   3) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
   4) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{w}$
   5) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

7. ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ จงหาเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $|\vec{u} \cdot \vec{v}|$ และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่กำหนดด้วย $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

8. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $PQRS$ เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\overrightarrow{PS} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$

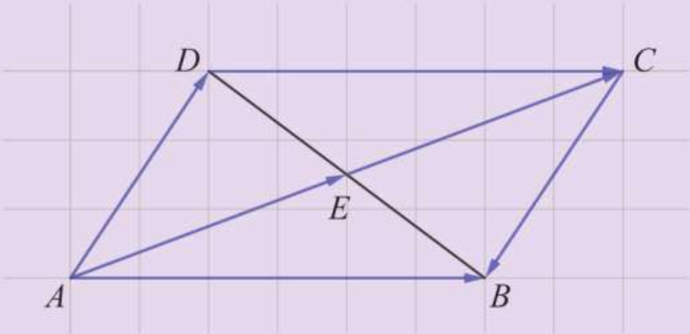
9. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(0, 2, 2), B(8, 8, -2)$ และ $C(9, 12, 6)$

10. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCDEFGH$ โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}, \overrightarrow{AD} = \vec{v}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{w}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ดังต่อไปนี้

    1) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}, \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{w} = \vec{j} + \vec{k}$
    2) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}, \vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ดังรูป

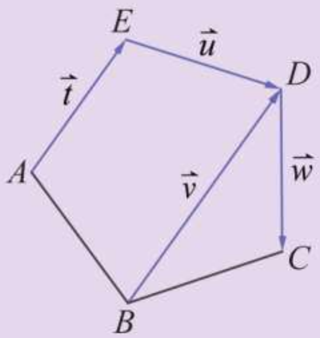


จงหาว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้คู่ใดบ้างที่

1) ขนานกัน 2) เท่ากัน 3) เป็นนิเสธกัน

2. จากจุดเริ่มต้น ทศพรเดินไปทางทิศ 225 องศา โดยวัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร และจากจุดเริ่มต้นเดียวกันปุณณ์เดินไปทางทิศ 180 องศา โดยวัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา เป็นระยะทาง 3 กิโลเมตร จงหาว่าทศพรอยู่ทางทิศใดของปุณณ์

3. จากรูป จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{t}, \vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$



1) $\overrightarrow{BC}$ 2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

3) $\overrightarrow{BE}$ 4) $\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{DE}$

5) $\overrightarrow{CA}$ 6) $\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}\right)-\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right)$

4 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ให้จุด D และ E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ AC ตามลำดับ ถ้า $\overline{AD}$ และ $\overline{BE}$ ตัดกันที่จุด G จงแสดงว่า $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GD}$

5 กำหนดรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า $ABCDEF$ โดยที่ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{AF} = \vec{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

1) $\overrightarrow{BF}$
2) $\overrightarrow{CF}$
3) $\overrightarrow{EF}$

6 กำหนด $\vec{u} = 3\vec{v}$ โดยที่ $\vec{v}$ ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ ถ้า $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเป็น $\frac{1}{2}$ ของขนาดของ $\vec{v}$ จงอธิบายความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{w}$

7 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกันและไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ทั้งคู่ ถ้า $(a+2b-7)\vec{u} = (3b-a-3)\vec{v}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว จงหา a และ b

8 กำหนดรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ ให้จุด P และ Q เป็นจุดบนด้าน BC และ CD ตามลำดับ ถ้า $BP = 2PC, CQ = 3QD$ และ $\overrightarrow{PQ} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$ แล้ว จงหา a และ b

9 กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ ให้จุด M และ N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และ CD ตามลำดับ ถ้า $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ และ $\vec{v} = \overrightarrow{AN}$ แล้ว จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

10 ถ้าจุด (x, y, z) ทั้งหมดที่อยู่ห่างจากจุด $(0, 0, 0)$ และ $(1, 2, 3)$ เป็นระยะทางเท่ากัน สอดคล้องกับสมการ $x + ay + bz = c$ จงหา a, b และ c

11 ให้จุด P มีพิกัดเป็น $(1, -2, 2)$ ถ้า A, B และ C เป็นภาพฉายของจุด P บนแกน X ในระนาบ XY และในระนาบ XZ ตามลำดับ จงหา

1) ชนิดของรูปสามเหลี่ยม ABC
2) ความยาวรอบรูปของรูปสามเหลี่ยม ABC
3) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

12 กำหนด $\vec{t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ จงหา

1) $2\vec{t} - \frac{1}{2}\vec{u}$

2) นิเสธของ $\vec{u} - 3\vec{t}$

3) $2(\vec{v} + 2\vec{w})$

4) นิเสธของ $\frac{1}{2}(3\vec{v} - \vec{w})$

13 กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ให้จุด D และ E เป็นจุดบนด้าน AB และ AC ตามลำดับ ถ้า $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{BC}$ จงหา $m - n$

14 กำหนดรูปสี่เหลี่ยมคางหมู $ABCD$ ที่ด้าน AB และ CD เป็นด้านคู่ขนาน และมีจุด E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB และ CD ตามลำดับ จงแสดงว่า $\left|\overrightarrow{EF}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right|$

15 กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ให้จุด E, F, G และ H เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ DA ตามลำดับ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $EFGH$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

16 กำหนดรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส $ABCD$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยจุดยอดทั้งสี่อยู่ในจตุภาคที่ 1 ถ้า A และ B มีพิกัดเป็น $(1, 1)$ และ $(3, 1)$ ตามลำดับ แล้ว จงหา $\overrightarrow{AC}$

17 ให้ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ และจุด P มีพิกัดเป็น $(-1, 3)$ จงหาพิกัดของจุด Q

18 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ แล้ว จงหา a และ b

19 ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ k \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกับ $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงหาขนาดของ $\vec{u} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

20 ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ a \\ b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาด 3 หน่วย จงหา $a^2 + b^2$

21 ให้ $\vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ จงหา

1) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u} + \vec{v}$
2) เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $2\vec{u} - \vec{v}$

22 จงหาเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่ได้ในแต่ละข้อมีความสัมพันธ์กันอย่างไร

1) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P(1, 3, -2)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(-3, 1, 2)$
2) $\overrightarrow{RS}$ เป็นเวกเตอร์ 1 หน่วย ที่มีทิศทางเดียวกับ $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
3) $\overrightarrow{AC}$ เป็นเวกเตอร์ 4 หน่วย ที่มีทิศทางตรงข้ามกับ $\begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

23 จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน

1) $\overrightarrow{PQ}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P(1, 4, 3)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(-2, 0, 1)$
2) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$
3) $\overrightarrow{OR}$ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิดและจุดสิ้นสุดที่ $R(5, 0, 2)$

24 จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้

1) $\vec{u} = 3\vec{i}$ และ $\vec{v} = 3\vec{j}$
2) $\vec{u} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ และ $\vec{v} = -\vec{i} + 7\vec{j}$
3) $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ และ $\vec{v} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$
4) $\vec{u} = \vec{i} - 7\vec{j}$ และ $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$

25 กำหนด $\vec{u} = -2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}, \vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{w} = -3\vec{j} + 5\vec{k}$ จงหา

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
2) $(3\vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot (2\vec{w})$
3) $(\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v}$
4) ค่าของ $\tan\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

26 ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$ และ $|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{26}$ แล้ว จงหา $\vec{v}$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้

27 จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองเส้นของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสตัดกันเป็นมุมฉาก

28 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ถ้า $|\vec{u}| = 1, \dfrac{|\vec{u} + \vec{v}|}{|\vec{u} - \vec{v}|} = \sqrt{\dfrac{31}{21}}$ และ $\vec{u}$ ทำมุม $60°$ กับ $\vec{v}$ จงหา $|\vec{v}|$ ทั้งหมดที่เป็นไปได้

29 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากัน ถ้า $\vec{u} + \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u} - 2\vec{v}$ จงหาขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

30 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ จงแสดงว่า $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \le (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$ และพิจารณาว่าเมื่อใดที่ $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = (\vec{u} \cdot \vec{u})(\vec{v} \cdot \vec{v})$

31 จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(7, -5, 6), B(3, -2, -6), C(6, -14, -10)$ และ $D(10, -17, 2)$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

32 กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง $|\vec{u}| = |\vec{w}|$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = |\vec{v} + \vec{w}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาด $\dfrac{\pi}{5}$ เรเดียน แล้ว จงหาขนาดของมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

☆ 33. จงแสดงว่าเส้นมัธยฐานที่ลากจากจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วตั้งฉากกับฐาน

34 กำหนด $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}-4\vec{k}, \vec{v}=-3\vec{i}-2\vec{k}$ และ $\vec{w}=-2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ จงหา

1) $\vec{u}\times\vec{v}$

2) $\vec{v}\times\vec{u}$

3) $|\vec{u}\times\vec{w}|$

4) $(\vec{v}\times\vec{w})-(\vec{w}\times\vec{v})$

5) $\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{w})-\vec{v}\cdot(\vec{w}\times\vec{u})$

6) $\vec{u}\times(\vec{v}\times(2\vec{w}))+3\vec{w}$

7) ค่าของ $\sin\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

8) ค่าของ $\cot\theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{w}$ และ $\vec{u}$

35 ถ้า $\begin{bmatrix}1\\1\\m\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2\\1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\6\\3\end{bmatrix}$ แล้ว จงหา m

36 จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 5 หน่วย ทั้งหมด ซึ่งตั้งฉากกับทั้ง $\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}-2\\1\\3\end{bmatrix}$

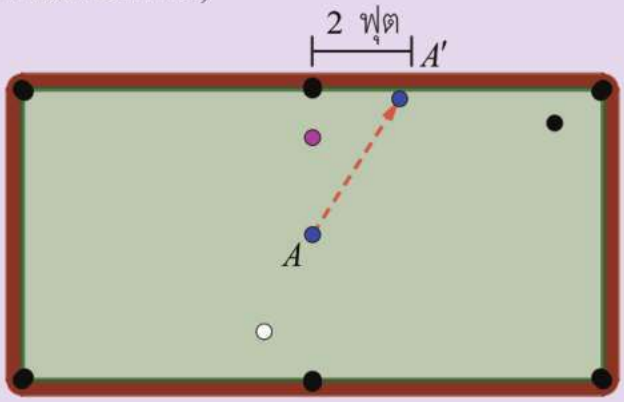
37 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ซึ่ง $\vec{u}\cdot\vec{v}=-\frac{1}{2}$ แล้ว จงหา $|\vec{u}\times\vec{v}|$

38 จงพิจารณาว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(5, 7, -5), B(0, 5, -12), C(-3, 1, -1)$ และ $D(2, 3, 6)$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมชนิดใด พร้อมทั้งหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

39 จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(2, -3, -1), B(-4, 1, 5)$ และ $C(7, -2, 6)$

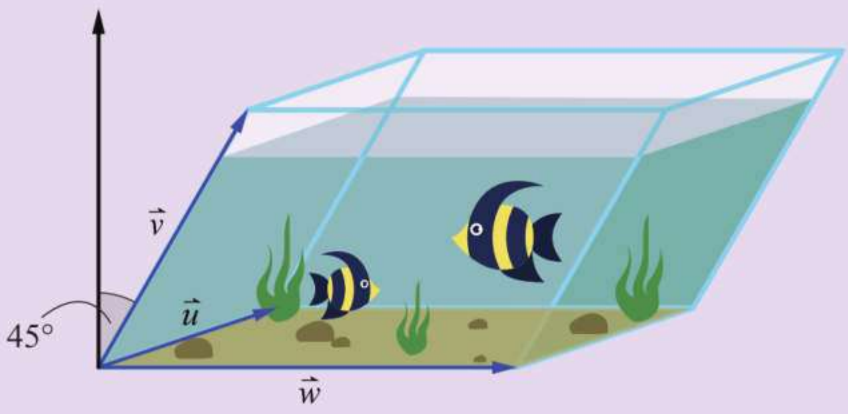
40 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\vec{u}=-2\vec{i}+5\vec{j}+3\vec{k}, \vec{v}=-\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ และ $\vec{w}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ เป็นด้าน

41 ในการแข่งขันสนุกเกอร์ชิงแชมป์ประเทศไทยรอบชิงชนะเลิศ นักสนุกเกอร์คนหนึ่งแทงลูกสนุกเกอร์สีขาวไปชนลูกสนุกเกอร์สีน้ำเงินที่ตำแหน่ง A ซึ่งอยู่บริเวณกึ่งกลางโต๊ะ ทำให้ลูกสนุกเกอร์สีน้ำเงินเคลื่อนที่ไปกระทบขอบโต๊ะที่ตำแหน่ง A' ซึ่งอยู่ห่างจากหลุมกลาง 2 ฟุต ดังรูป ถ้าโต๊ะสนุกเกอร์กว้าง 6 ฟุต และยาว 12 ฟุต จงพิจารณาว่าลูกสนุกเกอร์สีน้ำเงินลูกนี้จะลงหลุมหรือไม่ ถ้าลงจะลงหลุมใด พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล (ถ้าแทงลูกสนุกเกอร์ด้วยความแรงมากพอ)



42 ตู้ปลาในร้านอาหารแห่งหนึ่งเป็นทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีฐานยาว 450 เซนติเมตร และกว้าง 180 เซนติเมตร กระจกด้านหน้าและด้านหลังตั้งฉากกับฐาน แต่กระจกด้านซ้ายและด้านขวาเอนทำมุม 45 องศากับแนวตั้ง โดยกระจกด้านข้างแต่ละด้านยาว 225 เซนติเมตร และกว้าง 180 เซนติเมตร กำหนด $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ดังแสดงในรูป จงหา

1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
2) ความจุของตู้ปลานี้ (ในหน่วยลิตร)



บรรณานุกรม

กฎกระทรวง ฉบับที่ 55 (พ.ศ. 2543) ออกตามความในพระราชบัญญัติควบคุมอาคาร พ.ศ. 2522. (2543, 7 สิงหาคม). *ราชกิจจานุเบกษา*. เล่ม 117 ตอนที่ 75 ก. หน้า 27-28.

กรมที่ดิน. (2558, สิงหาคม). *แนวทางการตรวจสอบที่เขา ที่ภูเขา และที่ลาดชันเฉลี่ยเกิน 35% ขึ้นไป เพื่อการออกหนังสือแสดงสิทธิในที่ดิน*. กรุงเทพฯ: กองการพิมพ์ กรมที่ดิน กระทรวงมหาดไทย.

ตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย. *กองทุนรวม (Mutual Fund)*. สืบค้นเมื่อ 24 มกราคม 2561, จาก https://www.set.or.th/set/education/html.do?name=mutualfund

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *คู่มือครูรายวิชาพื้นฐานวิทยาศาสตร์ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2554). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานวิทยาศาสตร์ 6 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมวิทยาศาสตร์ โลก ดาราศาสตร์ และอวกาศ เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 2). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2557). *หนังสือเรียนรู้เพิ่มเติมเพื่อเสริมศักยภาพคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 เรื่องระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์*. กรุงเทพฯ: บริษัท พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.) จำกัด.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 – 6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 3 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 9). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

อัมริสา จันทนะศิริ. (2557). คณิตศาสตร์กับวิทยาการเข้ารหัสลับ. *นิตยสาร สสวท.*, 42(190), 33-36.

อัมริสา จันทนะศิริ. (2561). ตรีโกณมิติกับปรากฏการณ์ข้างขึ้นข้างแรม. *นิตยสาร สสวท.*, 46(211), 21-24.

Barnett, R. A., Ziegler, M. R. & Byleen, K. E. (2015). *Finite Mathematics for Business, Economics, Life Sciences and Social Sciences* (13th ed). Essex, England: Pearson Education Limited.

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction* (7th ed). Singapore: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Frosty Drew Observatory & Sky Theatre. (1999, October). *Phases of the Moon*. Retrieved August 1, 2017, from https://frostydrew.org/observatory/columns/1999/oct.htm

Larson, R. (2016). *Algebra and Trigonometry: Real Mathematics, Real People* (7th ed). Boston, MA: Brooks/Cole - Cengage Learning.

Miller, C. D., Heeren, V. E. & Hornsby, J. (2012). *Mathematical Ideas* (12th ed). Boston, MA: Pearson Education, Inc.

Murdock, J., Kamischke, E. & Kamischke, E. (2004). *Discovering Advanced Algebra: An Investigative Approach: Teacher's Edition*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Rousseau, C. & Saint-Aubin, Y. (2008). *Mathematics and Technology* (C. Hamilton, Trans.). New York, NY: Springer Science+Business Media, LLC.

Société d'Exploitation de la Tour Eiffel. *La Tour en Chiffres*. Retrieved March 20, 2018, from https://www.toureiffel.paris/fr/le-monument/chiffres-cle

Sparavigna, A. C. (2016). Khufu, Khafre and Menkaure Pyramids and the Sun. *arXiv: 1604.05963 [physics.hist-ph]*.

Stewart, J., Redlin, L. & Watson, S. (2011). *Precalculus: Mathematics for Calculus* (6th ed). Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Young, C. Y. (2013). *Algebra and Trigonometry* (3rd ed). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, Inc.

ที่มาของภาพ

หน้า 6	(บน)	Wikimedia Commons/Public Domain
	(ล่าง)	Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 134	(ซ้าย)	Mark Caldicott/Pixabay/CC0 1.0
	(ขวา)	Norbert/Pixabay/CC0 1.0
หน้า 145	(ซ้าย)	Wikimedia Commons/Public Domain
	(ขวา)	Herbert Beraud/Wikimedia Commons/Public Domain

กราฟทั้งหมดในหนังสือเรียนเล่มนี้สร้างด้วยโปรแกรม GeoGebra

ภาคผนวก

ดัชนี

บทที่ 2		หน้า
เมทริกซ์	matrix	143
แถว	row	143
หลัก	column	143
สมาชิก	entry	143
ขนาด	size	143
มิติ	dimension	143
เมทริกซ์เอกลักษณ์	identity matrix	162
เมทริกซ์จัตุรัส	square matrix	160
เมทริกซ์สลับเปลี่ยน	transpose of a matrix	164
ดีเทอร์มิแนนต์	determinant	172
ระบบสมการเชิงเส้น	system of linear equations	187
n สิ่งอันดับ	ordered n-tuple	188
เมทริกซ์แต่งเติม	augmented matrix	192
การดำเนินการตามแถวมูลฐาน	elementary row operation	193

บทที่ 3		หน้า
ปริมาณสเกลาร์	scalar quantity	213
ปริมาณเวกเตอร์	vector quantity	213
ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง	directed line segment, directed segment	213
จุดเริ่มต้น	initial point	214
จุดสิ้นสุด	terminal point	214
เวกเตอร์ศูนย์	zero vector	222
แกน X	$X-$ axis	236
แกน Y	$Y-$ axis	236

แกน Z	$Z-$ axis	236
จุดกำเนิด	origin	236
แกน X ทางบวก	positive $X-$ axis	236
แกน Y ทางบวก	positive $Y-$ axis	236
แกน Z ทางบวก	positive $Z-$ axis	236
แกน X ทางลบ	negative $X-$ axis	236
แกน Y ทางลบ	negative $Y-$ axis	236
แกน Z ทางลบ	negative $Z-$ axis	236
อัฐภาค	octant	237
พิกัด	coordinate	237
สามสิ่งอันดับ	ordered triple	237
ภาพฉาย	projection	239
เวกเตอร์หนึ่งหน่วย	unit vector	256
ผลคูณเชิงสเกลาร์	scalar product	260
ผลคูณเชิงเวกเตอร์	cross product	272

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

sin	ฟังก์ชันไซน์
cos	ฟังก์ชันโคไซน์
tan	ฟังก์ชันแทนเจนต์
sec	ฟังก์ชันเซแคนต์
cosec	ฟังก์ชันโคเซแคนต์
cot	ฟังก์ชันโคแทนเจนต์

arcsin	ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์
arccos	ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์
arctan	ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

บทที่ 2

a_{ij}	สมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์
$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$	เมทริกซ์ขนาด $m\times n$
$\underline{0}$	เมทริกซ์ศูนย์
$-A$	ตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของเมทริกซ์ A
I	เมทริกซ์เอกลักษณ์
A^t	เมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ A
$\det(A)$	ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ A
A^{-1}	ตัวผกผันการคูณของเมทริกซ์ A
$[A \mid B]$	เมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการ $AX = B$
$A \sim B$	เมทริกซ์ A สมมูลกับเมทริกซ์ B

บทที่ 3

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}, \vec{u}$	เวกเตอร์
$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert, \lvert\vec{u}\rvert$	ขนาดของเวกเตอร์
$\vec{u} \,//\, \vec{v}$	$\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$
$\vec{u} = \vec{v}$	$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$
$-\vec{u}$	นิเสธของ $\vec{u}$
$\vec{u} + \vec{v}$	ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
$\vec{0}$	เวกเตอร์ศูนย์
$\vec{u} - \vec{v}$	เวกเตอร์ $\vec{u}$ ลบด้วย $\vec{v}$
$\vec{i}$	เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
$\vec{j}$	เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
$\vec{k}$	เวกเตอร์ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$
$\vec{u} \times \vec{v}$	ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำหนังสือเรียน

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฏ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญูดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมขลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ผศ. ดร.คำรณ เมฆฉาย	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.สุจินต์ คมฤทัย	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
นายดังเจตน์ เชี่ยววัฒนา	นักวิชาการอิสระ
ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	นักวิชาการอิสระ

คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

ดร.ศุภณัฐ ชัยดี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.ทิพาลัคน์ กฤตยาเกียรณ์	มหาวิทยาลัยมหิดล
นางสาวกมลฉัตร ตราชู	นักวิชาการอิสระ
นายดิน ประทุมวรรณ์	นักวิชาการอิสระ
นายเอกภัค เจริญเลิศมงคล	นักวิชาการอิสระ
นายอัฐวิช นริศยาพร	นักวิชาการอิสระ
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
สาขาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ออกแบบปก

บริษัท พิงค์ บลู แบล็ค แอนด์ ออเร้จน์ จำกัด

ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เพอลังอิ พับลิชชิ่ง (ประเทศไทย) จำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ